详细解答

STEP III 1988，第 11 题

力学 · 涉及摩擦力的梯子平衡

STEP III 1988，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q11

关键思路

先弄清几何关系：地面、斜坡和梯子构成一个三角形，它的各个角你其实已经知道，由此便可判断光滑斜坡对梯顶的推力朝哪个方向。之后就是处理梯子问题的标准步骤：分解（resolve）两次，对梯脚取力矩（moments），再把所需的摩擦力（friction）与 μ 乘以法向反作用力（normal reaction）作比较。由于工人的位置只出现在力矩方程之中，一条通用公式便可同时回答两部分。

解答

准备工作

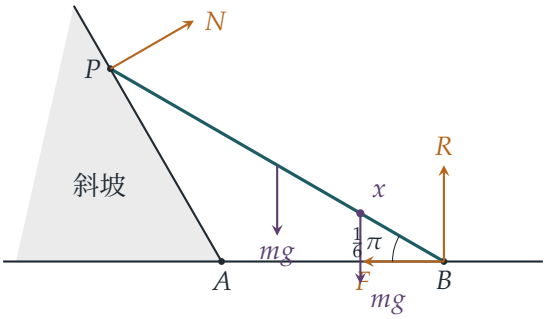
把梯子视为均匀杆（uniform rod），把工人视为质点（particle）。设 A 为斜坡的底端，B 为梯脚，P 为梯顶，梯顶位于斜坡上。

几何关系。在三角形 ABP 中，B 处的角为 $\frac{1}{6}\pi$（即梯子的倾角）。斜坡与铅垂线成 $\frac{1}{6}\pi$，所以它在 A 的另一侧与水平线成 $\frac{1}{3}\pi$。因此三角形内 A 处的角为 $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$，余下 $\frac{1}{6}\pi$ 便是 P 处的角。所以这是一个等腰三角形（isosceles triangle），$AP = AB$，而由正弦定理（sine rule）可得

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

与题目给出的距离吻合。题目的数据互相一致，P 的确在斜坡上。

斜坡反作用力的方向。斜坡是光滑（smooth）的，所以它对梯子的反作用力 N 垂直于斜坡。斜坡与水平线成 $\frac{1}{3}\pi$，故其法线与水平线成 $\frac{1}{6}\pi$，指向斜上方并离开斜坡，朝着 B 的一方。因此 N 的水平分量为 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$，把梯子推离斜坡；铅垂分量为 $\frac{1}{2}N$，方向向上。



方程。设工人沿梯子向上距离梯脚 x。在 B 处，地面施加向上的法向反作用力 R，以及沿水平方向指向斜坡的摩擦力 F（除此之外唯一的水平力是 N 的分量，它把梯脚推离斜坡，所以摩擦力必须与之相反）。这里的距离是由 B 起计。

沿水平和铅垂方向分解：

$$F = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad\qquad R + \tfrac{1}{2}N = 2mg.$$

对 B 取力矩，这样 R 和 F 便不会出现。由 B 到梯子上距离梯脚 s 的一点，水平距离为 $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$。$N$ 的作用线与水平线成 $\frac{1}{6}\pi$，而 BP 则在水平线的另一侧与之成 $\frac{1}{6}\pi$，所以 N 与梯子的夹角为 $\frac{1}{3}\pi$。它对 B 的力矩是 $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$。因此

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{l}{2} + mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right).$$

想一想 为甚么 N 的力矩会这样简单？

由 B 到 N 的作用线的垂直距离是 $l\sin\frac{1}{3}\pi$，因为 N 与梯子相交的角度是 $\frac{1}{3}\pi$。又或者把 N 分解成分量：水平部分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ 作用于高度 $\frac{1}{2}l$ 处，铅垂部分 $\frac{1}{2}N$ 作用于水平距离 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ 处。两者的力矩都是 $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$，加起来就是 $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$。

于是当 $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$ 对 $0 \le x \le l$ 成立，梯脚便一直留在地面上。只要 $F \le \mu R$，梯子就不会滑动，即

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l+2x)}{7l-2x}.$$

这个比值随 x 增加而增加：分子增加，而恒为正数的分母减少。所以工人愈往上爬，所需的摩擦力便愈大。

第 (i) 部分

工人一到达梯子的中点，梯子便滑动。所以极限摩擦（limiting friction）恰好在 $x = \frac{1}{2}l$ 时出现，而由于 F/R 随 x 递增，在此之前不会出现。这时 $N = mg$、$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ 及 $R = \frac{3}{2}mg$，

所以

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

第 (ii) 部分

若 $F \le \mu R$ 对每一个 $x \in [0, l]$ 都成立，工人便能到达梯顶。由于 F/R 随 x 递增，最坏的情况是 $x = l$。这时 $N = \frac{3}{2}mg$、$F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$ 及 $R = \frac{5}{4}mg$，所以摩擦系数（coefficient of friction）的最小值为

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

验算

- 梯上无人时（$x = 0$），公式给出 $\mu \ge \sqrt{3}/7 \approx 0.247$。这比两个答案都小，正合预期。
- 把 $l = 1$、$m = 1$、$g = 9.8$ 代入三条平衡方程作数值计算，并把各个力写成向量，可重现 $N/mg = 1$ 和 $\frac{3}{2}$，以及比值 $F/R = 0.57735\ldots$ 和 $1.03923\ldots$。计算亦确认，在梯子上的 101 个位置，F/R 都是递增的。

常见错误

- 把斜坡的反作用力当作水平方向，就像处理铅垂墙壁那样。这里它向水平线上方倾斜了 $\frac{1}{6}\pi$，而它向上的分量会令 R 减小。
- 沿铅垂方向分解时忘记了工人的重量，结果写成 $R + \frac{1}{2}N = mg$ 而不是 $2mg$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其实是对各种配置所作的一个小型最优化（optimisation）：你需要找出负载在所有位置之中 F/R 的最坏情况。工程师正是这样找出结构的临界负载情况。要想像条件 $F \le \mu R$，一个有用的方法是**摩擦锥**（cone of friction）：地面的总反作用力必须落在与法线成 $\arctan\mu$ 的角度之内，而当所需的反作用力离开这个锥的一刻，梯子便会滑动。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体静力学和摩擦有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。