详细解答

STEP III 1988，第 10 题

纯数学 · 追踪曲线

> **STEP III 1988，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 8.5 节格力犬追逐格力犬中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/pursuit.html

关键思路

不要尝试分别追踪四只移动中的狗。整个设置绕中心旋转四分之一圈后维持不变，所以四只狗始终位于一个以 O 为中心的正方形的四个顶点上：这个正方形会缩小、会旋转，但始终是正方形。这就确定了 A 的速度与直线 AO 之间的夹角，而速度与半径之间的夹角固定，正正就是产生等角螺线（equiangular spiral）$r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$ 的条件。

解答

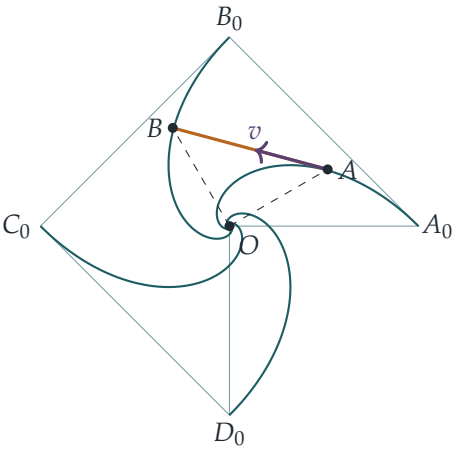
四只狗始终位于正方形上

取正方形的中心为原点 O，并按逆时针方向为四只狗编号，使得 B 位于 A 逆时针旋转四分之一圈之处，C 位于 B 逆时针旋转四分之一圈之处，如此类推。

把整幅图绕 O 旋转 $\frac{\pi}{2}$。A, B, C, D 的起始位置分别变成 B, C, D, A 的起始位置，而“以速率 v 直奔下一只狗”这条规则对每只狗都是一样的。所以旋转后的运动，同样是由相同的起始布局出发、遵从相同规则的运动。由给定起点出发的运动是唯一的（只要四只狗尚未相遇，速度就是位置的光滑函数），所以旋转后的运动就是实际的运动。换言之，在每一瞬间，B 的位置就是 A 的位置绕 O 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得的位置。C 和 D 亦然。所以 $ABCD$ 始终是一个以 O 为中心的正方形。

速度与半径之间的夹角

设 A 在极坐标（polar coordinates）中位于 (r,θ)。那么 B 位于 $(r,\theta+\frac{\pi}{2})$，所以 $OA=OB=r$，而 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$。三角形 OAB 是等腰直角三角形，所以 $\angle OAB=\frac{\pi}{4}$。



图中显示四条路径由起始顶点 A_0, B_0, C_0, D_0 向内盘旋，并标出某一瞬间 A 和 B 两只狗的位置。A 的速度（紫红色）沿 AB 方向。

A 的速度大小为 v，方向沿 AB，与向内的半径 AO 成 $\frac{\pi}{4}$ 角。把它分解为径向分量（radial component，以向外为正）和横向分量（transverse component，沿 θ 增加的方向）：

$$\dot r=-v\cos\frac{\pi}{4},\qquad r\dot\theta=v\sin\frac{\pi}{4}.$$

横向分量为正，是因为 B 位于 A 的逆时针方向，所以 A 被拉着逆时针转动。

> ? **想一想** 为甚么可以把这两条方程相除?

由于四只狗尚未相遇时 $r\dot\theta=v/\sqrt{2}>0$，θ 随时间严格递增。所以我们可以用 θ 代替 t 作为路径上的参数，再由链式法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot r}{\dot\theta}=\frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)}=-r.$$

求出路径

由于 $r>0$，我们可以分离变量（separate variables）：$\int\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\int\mathrm{d}\theta$，所以 $\ln r=-\theta+c$，即

$$r=\lambda\mathrm{e}^{-\theta}$$

其中 $\lambda=\mathrm{e}^c$ 是常数。这就是所求的结果。如果我们选取 OA_0 为始线，使得开始时 $\theta=0$，那么 λ 就是 A 与 O 的初始距离，对于边长为 a 的正方形，即 $a/\sqrt{2}$。若选取其他始线，λ

只会相差一个常数因子。（如果我们按顺时针方向为四只狗编号，则以顺时针方向量度 θ 便会得到相同的方程。）

推广至 n 只狗

对于位于正 n 边形各顶点上的 n 只狗（按逆时针方向编号，每只追逐下一只），把旋转角改为 $\frac{2\pi}{n}$，同样的论证依然成立。这些狗始终构成一个以 O 为中心的正 n 边形。所以若 A 位于 (r,θ)，下一只狗 B 就位于 $(r,\theta+\frac{2\pi}{n})$。

三角形 OAB 是等腰三角形，顶角为 $\frac{2\pi}{n}$，所以每个底角为

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

如前分解 A 的速度，

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

由于 $n \geq 3$，$\cos\frac{\pi}{n} > 0$，所以 θ 同样稳步递增，并且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

当 $n=4$ 时，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，我们重新得到 $r=\lambda\mathrm{e}^{-\theta}$。每只狗都沿着一条等角螺线（又称对数螺线，logarithmic spiral）前进，以固定的角 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ 与每条半径相交。

一个有趣的副产品：$\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常数，所以这些狗在时间 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ 之后于 O 相遇，其中 r_0 是与 O 的初始距离。在这段时间内，每只狗跑过的距离是有限的 $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$，尽管 $\theta\to\infty$，牠绕着 O 转了无限多圈。（对于正方形，这个距离是 a，即边长。）

验算

- 当 $n=4$ 时，结果就是一般公式在 $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 时的特殊情况。
- 当 $n\to\infty$ 时，$\tan\frac{\pi}{n}\to 0$，路径趋向一个圆：每只狗所追逐的邻居，在圆上几乎与牠并排。
- 我们以数值方法模拟了这场追逐（用 RK4 方法，取 $n=3,4,5,6,8$ 只狗，由半径 1 出发）。算出的 r 与 $\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}$ 吻合，相对误差为 10^{-11}。当 $n=4$ 时，到达 $r=0.02$ 所需的时间和路径长度均算得 $1.386 = 0.98\sqrt{2}$，与 $(1-0.02)/\sin\frac{\pi}{4}$ 所预测的一致。

常见错误

- 未先论证这些狗始终位于正多边形上，就直接写下 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$。正是靠对称性论证，我们才知道 A 处的角。

- 用了多边形的内角（正方形为 $\frac{\pi}{2}$），而不是 AB 与半径 AO 之间的夹角（$\frac{\pi}{4}$）。
- 忘记了横向速度分量是 $r\dot{\theta}$，而不是 $\dot{\theta}$。

STEP 之外

这是一道经典的追逐问题（pursuit problem）。对称性那一步，是微分方程（differential equations）中一个普遍原理的例子：如果方程和初始数据在某个对称变换下都保持不变，那么解的唯一性就迫使解本身也保持不变。与每条半径以固定角相交的曲线，就是等角螺线。以复数形式表示，它们是 $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$，所以整个运动是平面上一个连续的“旋转相似变换”（spiral similarity）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何观点讲解复分析）阐述了这种几何观点，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）则涵盖了解的存在性与唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。