详细解答

STEP III 1988，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘与界限

> **STEP III 1988，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q1

关键思路

绘画草图时，因子 $x^2\mathrm{e}^{-x}$ 永不为负，所以 y 的正负完全由 $1+x$ 决定。有了这一点，再加上一次求导，以及曲线在两端和 $x=-1$ 附近的表现，整条曲线的形状便清楚了。至于积分，最干净利落的做法是把 x^2 除以 $1+x$：这样被积函数（integrand）的大部分积分后恰好互相抵消，余下的部分则很容易夹在两个简单的界之间。

解答

图像

设 $f(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$，定义于所有 $x\neq -1$。

正负与零点。由于 $x^2\geq 0$ 而 $\mathrm{e}^{-x}>0$，当 $x<-1$ 时 $f(x)<0$，当 $x>-1$ 时 $f(x)\geq 0$，而且只有在 $x=0$ 时才有 $f(x)=0$。因子 x^2 表示曲线在原点只是与 x 轴相切，而不是穿过它。

渐近线（asymptote）与两端的表现。

- 当 $x\to -1$ 时，分子趋向 $\mathrm{e}>0$，分母趋向 0，所以 $x=-1$ 是一条铅垂渐近线；当 $x\to -1^-$ 时 $f\to -\infty$，当 $x\to -1^+$ 时 $f\to +\infty$。
- 当 $x\to +\infty$ 时，$f(x)\approx x\mathrm{e}^{-x}\to 0^+$，因为指数函数的增长胜过幂函数。所以 $y=0$ 是右方的渐近线，曲线从上方趋近它。
- 当 $x\to -\infty$ 时，$\dfrac{x^2}{1+x}\approx x\to -\infty$ 而 $\mathrm{e}^{-x}\to +\infty$，所以 $f(x)\to -\infty$，而且下降得非常快。

驻点（stationary point）。根据商法则（quotient rule），

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x) - x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x + x^2 - x^3 - x^2\right)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x\left(2 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}.$$

所以在 $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{2}$ 时 $f'(x) = 0$。因子 e^{-x} 和 $(1+x)^2$ 都是正数，所以 f' 的正负与 $x(2 - x^2)$ 的正负相同：

区间	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

由此得出：

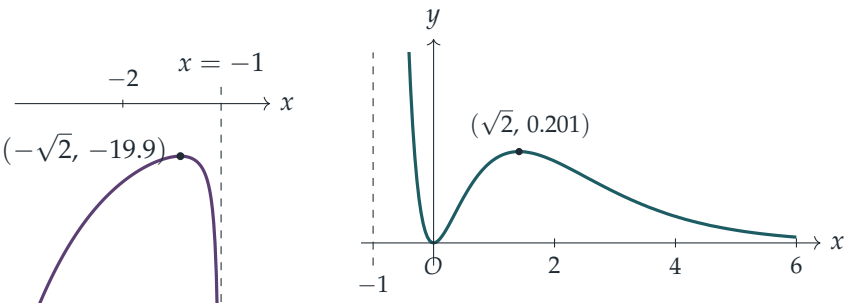
- 在 $x = \sqrt{2}$ 处有一个局部极大点（local maximum），该处 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.201$；
- 在原点有一个局部极小点（local minimum）；
- 在左边分支上的 $x = -\sqrt{2}$ 处有一个局部极大点，该处 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2} + 1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx -19.9$。

想一想 一条完全位于横轴下方的分支，怎可能有极大点？

在 $x < -1$ 的范围内，曲线随着 $x \to -\infty$ 从 $-\infty$ 升上来，到了渐近线 $x = -1$ 又再跌回 $-\infty$，所以它必定在中间某处转向。最高点位于 $x = -\sqrt{2}$，而这一点仍然远在横轴之下。这条分支是一个悬在横轴下方的“小丘”，丘顶的高度约为 -19.9。

在右边，曲线从紧贴 $x = -1$ 右侧的 $+\infty$ 下降，到原点时降至 0，然后上升至 $x = \sqrt{2}$ 处那个小小的极大点，其后衰减至 0。曲线在原点附近向上凹，在极大点处向下凹，所以在 $x = \sqrt{2}$ 的两侧各有一个拐点（point of inflection）（数值上约在 $x \approx 0.35$ 和 $x \approx 2.5$ 附近）。绘画草图时，我们不需要知道它们的准确位置。

两条分支在纵向上的尺度相差极大，所以我们把它们分开绘画。在左边，y 一直下降至约 -70。在右边，我们把 y 轴的比例放大，让 0.2 这个极大值清楚可见。



积分

设 $I=\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$。把 x^2 除以 $1+x$，得

$$\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}.$$

现在 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$（取 $u=x$ 作分部积分（integration by parts)），而 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$，所以首两项的贡献是 $1-1=0$，于是

$$I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

（三个积分全部收敛（converge），所以把积分拆开是合理的。）当 $x>0$ 时，我们有 $0<\frac{1}{1+x}<1$，所以

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}<\mathrm{e}^{-x}\qquad(x>0).$$

这些不等式在整个区间上都是严格的，而且各函数均为连续，所以积分后不等式仍然严格成立：

$$0<I<\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1.$$

所以 I 介乎 0 与 1 之间，正是题目所求。

另一种做法。我们可以略去除法这一步。当 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<\frac{x^2}{x}=x$，所以 $0<f(x)<x\mathrm{e}^{-x}$，从而 $0<I<\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$。不过那个除法仍然值得认识，因为它清楚显示了 I 究竟从何而来。

验算

- 在一千个随机选取的点上以数值方法对 f 求导，结果与 $f'(x)=x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x}/(1+x)^2$ 吻合。

- 在 $[0,60]$ 上使用辛普森法则（Simpson's rule）得出 $I \approx 0.59635$，而 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 亦给出相同的数值，稳稳地落在 0 与 1 之间。
- 从草图作粗略估算：在 $x > 0$ 的范围内，曲线是一个高度约为 0.2 的小丘，到了 $x = 6$ 已大致消退。以此为高和底的三角形，面积约为 0.6，与 0.596 相符。

常见错误

- 遗漏了 $x = -\sqrt{2}$ 处的驻点，因为它位于“另一条”分支上；又或者因为该处 y 是负数，便把它说成极小点。
- 说曲线在原点穿过横轴。二重因子 x^2 令曲线只是与横轴相切。
- 单凭 $\mathrm{e}^{-x} \le 1$ 便声称 $I < 1$。这个界只会得出 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$，而这个积分是发散（diverge）的。

STEP 之外

I 的值是 $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$，其中 $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$ 是指数积分（exponential integral）。这个数称为 Gompertz 常数（Gompertz constant）。它不能用初等函数（elementary functions）表示，这正是题目只要求找出上下界的原因。对于无法求出确切值的积分，拿它与能够求值的积分作比较，从而作出估计，是分析学（analysis）的一项核心技巧（即瑕积分（improper integral）的“比较判别法”（comparison test））。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）对此有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。