详细解答

STEP II 1988，第 9 题

纯数学 · 子群与并集

> **STEP II 1988，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q9

本题在 *Beyond STEP* 第 6.6 节子群的并集中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/subgroup-unions.html

关键思路

用反证法（proof by contradiction）。假如两个子群（subgroup）都不是整个群，就取一个只属于 G_2 的元素，再取一个只属于 G_1 的元素，然后问：它们的乘积落在哪里？无论把乘积放进哪一个子群，乘法的封闭性（closure）和逆元（inverse）都会导出矛盾。换成三个子群，乘积就多了一个去处。最自然的尝试，是找一个每个元素都是自身逆元的群。

解答

两个子群

假设 G 的每个元素都属于 G_1 或 G_2，并为了导出矛盾，假设 $G_1 \neq G$ 且 $G_2 \neq G$。

由于 $G_1 \neq G$ 而 $G_1 \subseteq G$，存在元素 $a \in G$ 使得 $a \notin G_1$。每个元素都属于 G_1 或 G_2，所以 $a \in G_2$。

同理，由于 $G_2 \neq G$，存在元素 $b \in G$ 使得 $b \notin G_2$，于是 $b \in G_1$。

因此我们有

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

现在考虑乘积 $ab \in G$。按假设，它属于 G_1 或 G_2。

- 若 $ab \in G_1$：由于 $b \in G_1$ 而 G_1 是子群，故 $b^{-1} \in G_1$，于是由封闭性得

$$a = (ab)\,b^{-1} \in G_1,$$

  这与 $a \notin G_1$ 矛盾。

- 若 $ab \in G_2$：由于 $a \in G_2$，故 $a^{-1} \in G_2$，于是

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  这与 $b \notin G_2$ 矛盾。

两种情况都不可能发生，所以我们的假设不成立：$G_1 = G$ 或 $G_2 = G$。 ■

想一想 我们在哪里用到了 G 是有限群这个条件?

完全没有用到。这个论证只用到子群的性质（封闭性和逆元），对任何群都成立，不论有限还是无限。换句话说：一个群永远不会是两个真子群（proper subgroup）的并集（union）。

三个子群

取 H 为克莱因四元群（Klein four-group）

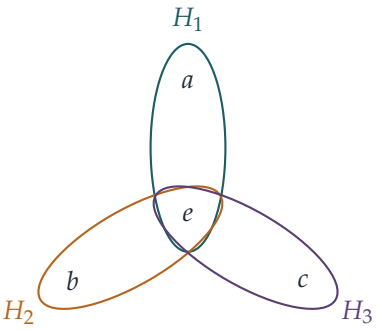
$$H = \{e,\ a,\ b,\ c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\ bc = cb = a,\ ca = ac = b.$$

具体来说，H 就是 $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ 在每个坐标各自模 2 相加之下所成的群，也可以看成非正方形的长方形的对称群（symmetry group）（恒等变换、两个反射和半周旋转）。

每个非单位元的元素的阶（order）都是 2，所以

$$H_1 = \{e,a\}, \qquad H_2 = \{e,b\}, \qquad H_3 = \{e,c\}$$

每一个都是子群：它包含 e，在乘法下封闭（唯一非平凡的乘积是 $a \cdot a = e$，b 和 c 的情况相同），而且每个元素都是自身的逆元。它们各有 2 个元素，所以没有一个等于 H。但它们合起来包含了 e、a、b 和 c，也就是 H 的全部元素。



所以三个真子群是可以覆盖一个群的。另一个例子是四元数群（quaternion group）$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，它是三个循环子群（cyclic subgroup）$\{\pm 1, \pm i\}$、$\{\pm 1, \pm j\}$ 和 $\{\pm 1, \pm k\}$ 的并集，每个子群的阶都是 4。

留意第一部分的论证为何在这里失效：当 $a \notin H_2$ 而 $b \notin H_1$ 时，乘积 $ab = c$ 可以溜进第三个子群 H_3。

验算

- 以穷举法搜索下列各群的所有子群：阶为 1 至 12 的循环群、S_3、S_4、阶为 8 的二面体群（dihedral group）、Q_8、$\mathbb{Z}_2^2$ 和 $\mathbb{Z}_2^3$（共 1278 个由真子群组成的有序对），结果找不到任何一对的并集等于整个群。
- 同一次搜索亦确认 $\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$ 就是整个克莱因四元群，而 Q_8 是 $\langle i\rangle$、$\langle j\rangle$、$\langle k\rangle$ 的并集。有趣的是，所测试的循环群，以及 S_3 和 S_4，没有一个是三个真子群的并集。
- 对第一部分作一个简单的合理性检查：在循环群中，生成元（generator）不属于任何真子群，所以循环群无论用多少个真子群都无法覆盖。

常见错误

- 用计数来论证：两个真子群各自最多有 $\frac{1}{2}|G|$ 个元素，但它们都含有 e，所以并集最多有 $|G| - 1$ 个元素。这个计数证明是正确的（根据拉格朗日定理（Lagrange's theorem）），而且简短，但它确实需要有限性和拉格朗日定理；两者都必须写明。
- 取了 $a \notin G_1$ 和 $b \notin G_2$，却忘记使用 $a \in G_2$ 和 $b \in G_1$。缺少这两个事实，就推不出矛盾。
- 给出的三个子群并非全是真子群，或者根本不是子群（例如 $\{e, a, b\}$，由于 $ab = c$，它并不封闭）。

STEP 之外

哪些群是三个真子群的并集？Scorza 的一个定理（1926 年）给出了答案：恰好是那些有商群（quotient）同构（isomorphic）于克莱因四元群的群，这也正是克莱因群成为基本例子的原因。同样的“不能是两个的并集”这一事实也出现在线性代数（linear algebra）中：无限域（infinite field）上的向量空间（vector space）永远不会是有限个真子空间（proper subspace）的并集。若想找一本群论的入门书，可以试试 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。