详细解答

STEP II 1988，第 8 题

纯数学 · 矩阵与特征向量

STEP II 1988，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q8

关键思路

模型中的一年是一个线性映射（linear map），因此相当于乘以一个 2×2 矩阵（matrix）M。比例永远不变的种群，就是 M 只会把它按比例放大或缩小的种群，也就是一个*特征向量*（*eigenvector*）。一旦求得两个特征向量，任何初始种群都可以分拆成沿这两个方向的两部分，而每一部分每年只是乘以它自己的特征值（eigenvalue）。于是，长远的命运就取决于哪个特征值较大，以及它前面的系数的正负。

解答

保持不变的比例

把种群数量写成列向量（column vector），模型中的一年就是

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

比例 $A : B$ 保持不变，当且仅当存在某个数 λ 使得 $(A', B') = \lambda(A, B)$，即 (A, B) 是 M 的特征向量。特征值满足

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

所以 $4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$，得出 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = \frac{3}{4}$。

- $\lambda = 1$：由第一行得 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$，所以 $A = B$。比例为 1，而这样的种群每年都完全不变。
- $\lambda = \frac{3}{4}$：由第一行得 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$，所以 $A = \frac{3}{2}B$。比例为 $\frac{3}{2}$；以第二行验算：$\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$。两个物种每年都缩减至原来的 $\frac{3}{4}$。

不用矩阵也可以得到同样的结果：若 $A = rB$，则新的比例为 $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$，令它等于 r 便得 $2r^2 - 5r + 3 = 0$，所以 $r = 1$ 或 $r = \frac{3}{2}$。无论用哪种方法，比例只有在等于 1 或 $\frac{3}{2}$ 时才能保持不变，正如题目所要求。我们取 $x = 1$ 和 $y = \frac{3}{2}$。

其后各年

设

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

比较各分量，得 $p + \frac{3}{2}q = a$ 和 $p + q = b$。两式相减，$\frac{1}{2}q = a - b$，所以

$$q = 2(a - b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

由于 M 是线性的，一年之后第一部分乘以 1，第二部分乘以 $\frac{3}{4}$；n 年之后（只要模型仍然适用），我们有

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b - 2a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$a_n = (3b - 2a) + 3(a - b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b - 2a) + 2(a - b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

由于 $(\frac{3}{4})^n \to 0$，种群数量趋向 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$，这是平衡点（equilibrium）所组成的直线 $a = b$ 上的一点。

分类之前，先确认一件可以放心的事：土豚永远不会出问题。若 $a_n \geq 0$ 且 $b_n > 0$，则 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$，所以只要水牛仍然存活，土豚的数量也保持为正数。因此唯一需要留意的是 b_n 的正负，而我们只需考虑平面上 $a \geq 0$、$b > 0$ 的区域。

> ? **想一想** b_n 会不会有一段时间跌至零以下，然后回升并趋向一个正的极限（limit）？

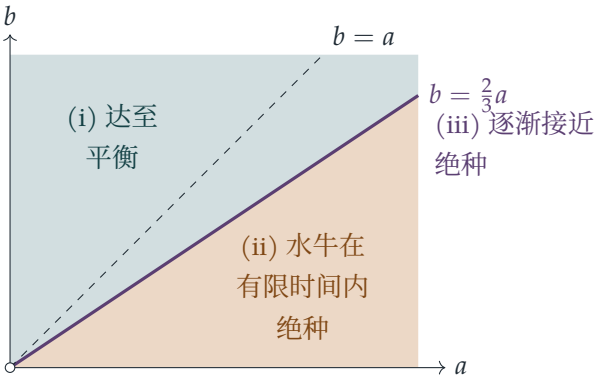
不会。在 b_n 的公式中，只有 $(\frac{3}{4})^n$ 与 n 有关，而它由 1 稳步递减至 0。所以 b_n 由 $b_0 = b$ 单调（monotonic）地移向它的极限 $3b - 2a$，而每个 b_n 都介乎 b 与 $3b - 2a$ 之间。这样分类就干净利落了。

三个区域

(i) 若 $3b - 2a > 0$，即 $b > \frac{2}{3}a$，则 b 和 $3b - 2a$ 都是正数，所以每个 b_n 都是正数，模型永远适用。种群趋向平衡点 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$，而这个平衡点并非零。这是直线 $b = \frac{2}{3}a$ 上方的区域（包括 b 轴，即 $a = 0$）。

(ii) 若 $3b-2a<0$，即 $b<\frac{2}{3}a$，则 $a>\frac{3}{2}b>b$，所以 $a-b>0$，而 b_n 严格递减并趋向负数 $3b-2a$。因此对某个有限的 n 有 $b_n\le 0$：水牛在有限时间内绝种。这是直线 $b=\frac{2}{3}a$ 与 a 轴之间的区域。

(iii) 若 $3b-2a=0$，即 $b=\frac{2}{3}a$ 且 $a>0$，则 $p=0$，种群纯粹是 $(\frac{3}{2},1)$ 的倍数：$b_n=b\,(\frac{3}{4})^n$，它对每个 n 都是正数，但趋向 0。水牛（以及土豚）逐渐接近绝种，却永远不会真正绝种。这只是半直线（half-line）$b=\frac{2}{3}a$，$a>0$。



虚线 $b=a$ 由已经处于平衡状态的种群组成；区域 (i) 内的每个起点都会向它移动，并且沿着与直线 $b=\frac{2}{3}a$ 平行的方向滑动（$(\frac{3}{2},1)$ 方向的分量不断缩小，而 $(1,1)$ 分量则保持不变）。

验算

- 取 $n=0$，公式给出 $a_0=3b-2a+3a-3b=a$ 和 $b_0=3b-2a+2a-2b=b$，正如所应得的结果。
- 由 $(a,b)=(1,3)$ 出发，它位于区域 (i)。按模型计算一年，得 $(\frac{1}{4}+\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}-\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},4)$，而公式给出 $7-6(\frac{3}{4})=\frac{5}{2}$ 和 $7-4(\frac{3}{4})=4$。极限为 $(7,7)$。
- 我们用电脑以分数作精确运算，由 3000 个随机起点迭代这个模型，确认了闭合形式（closed form）在 40 年内都成立，也确认了 $3b-2a$ 的正负在每一个情况下都能正确预测结果，包括 $b=\frac{2}{3}a$ 上的点，例如 $(3,2)$ 在五年后变成 $(\frac{729}{1024},\frac{243}{512})$，即起点的 $(\frac{3}{4})^5$ 倍。

常见错误

- 把比例上下颠倒：题目问的是土豚对水牛的比例，所以答案是 1 和 $\frac{3}{2}$，而不是 1 和 $\frac{2}{3}$。

- 忘记模型在 $b_n \leq 0$ 时便告终止，于是声称每个种群都趋向 $(3b-2a, 3b-2a)$，连“极限”为负数的情况也包括在内。
- 把区域 (iii) 说成一块面积：它只是半直线 $b = \frac{2}{3}a$，即 (i) 与 (ii) 之间的边界。

STEP 之外

这是一个离散线性动力系统（discrete linear dynamical system），而这里的方法（先对角化（diagonalise），再把每个特征值取 n 次方）正是大学一年级线性代数计算 M^n 的做法。特征值 1 给出一条由不动点（fixed point）组成的直线，而特征值 $\frac{3}{4} < 1$ 则给出一个不断衰减的方向；把时间改为连续，并以 $e^{\lambda t}$ 取代 λ^n，同样的图像就支配着线性微分方程组（systems of linear differential equations）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 有一章很好地讲解差分方程（difference equation）和矩阵的幂，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 则处理连续的版本。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。