详细解答

STEP II 1988，第 7 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 1988，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q7

关键思路

这里每一个等式都来自一次代换（substitution），难处在于找出合适的代换。第一步需要一个把 $[1,2]$ 送到 $[0,1]$、并把 $2-2x+x^2$ 变成含有 $1+t^2$ 的式子的代换：莫比乌斯映射（Möbius map）$x=2/(1+t)$ 恰好做到这一点。一旦出现 $1+t^2$，取 $t=\tan\theta$ 便是顺理成章的一步。以 θ 表示的被积函数（integrand）关于 $\theta=\frac{1}{8}\pi$ 对称，而在半个区间上把 $t=\tan\theta$ 还原，便会带出 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$。最后的推论是把同样的代换反过来使用。

解答

全篇之中，k 是任意实常数。所有要取幂的底数在所涉及的范围内都是正数，所以非整数次幂不会造成任何问题。

从 $[1,2]$ 到 $[0,1]$

设 $x=\dfrac{2}{1+t}$，于是当 $x=1$ 时 $t=1$，当 $x=2$ 时 $t=0$，并且 $\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$。那么

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

所以被积函数变成

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

而 $\mathrm{d}x$ 中的负号把积分上下限由 $\int_1^0$ 对调为 $\int_0^1$：

$$I=\int_0^1\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

三角形式

现在设 $t = \tan\theta$，其中 θ 由 0 变到 $\frac{1}{4}\pi$。那么 $1 + t^2 = \sec^2\theta$，$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，并且

$$1 + t = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)}{\cos\theta},$$

这里用到 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta + \sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$。被积函数变成

$$\sec^{2k}\theta \cdot \frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} \cdot \sec^2\theta = \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} = \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}},$$

因为 $\cos\theta$ 的幂次合计为 $-2k + (k+1) - 2 = -(k+1)$。两个余弦在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上都是正数，所以这对任何实数 k 都成立。这就得出 I 的第二个形式。

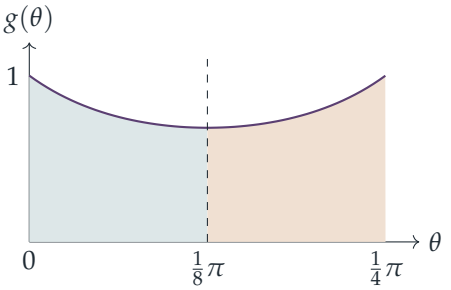
想一想 为甚么在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上的积分应该是在 $[0, \frac{1}{8}\pi]$ 上的积分的两倍?

把以 θ 表示的被积函数记作 $g(\theta)$。把 θ 换成 $\frac{1}{4}\pi - \theta$，只不过是把 $\cos\theta$ 和 $\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta)$ 这两个因子对调，所以 $g(\frac{1}{4}\pi - \theta) = g(\theta)$：$g$ 的图像关于 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 对称。（你也可以直接看出这一点：$\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}\cos(2\theta - \frac{1}{4}\pi))$，它只取决于 θ 与 $\frac{1}{8}\pi$ 的距离。）严格来说，代入 $\phi = \frac{1}{4}\pi - \theta$，

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

所以 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 的两半贡献相等，而

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}}.$$



图中所示是 $k = 1$ 时的 g：两个着色的半边互为镜像。

由此得出积到 $\sqrt{2}-1$ 的积分

现在在 $[0,\frac{1}{8}\pi]$ 上把代换 $t=\tan\theta$ 反过来做。上面计算的每一步都保持不变；只有上限移到了 $t=\tan\frac{1}{8}\pi$。由 $\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2\tau}{1-\tau^2}=1$，其中 $\tau=\tan\frac{1}{8}\pi$，可得 $\tau^2+2\tau-1=0$，所以 $\tau=-1\pm\sqrt{2}$，而正根就是 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$。因此

$$I=2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

这正是所求。把这个结果与同一被积函数的 $I=\int_0^1$ 比较，我们发现在 $[0,\sqrt{2}-1]$ 上的积分和在 $[\sqrt{2}-1,1]$ 上的积分*两者都*等于 $\frac{1}{2}I$。这就是我们接下来要用的事实。

推论

左方。写成 $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2}=\dfrac{2-2u+u^2}{u}$，其中 $u=x^2$。那么 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$，而 u 由 1 变到 2：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I.$$

右方。被积函数是 $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$，与 I 的定义中的相同，但积分区间是 $[1,\sqrt{2}]$。再次使用第一个代换 $x=2/(1+t)$。这时 $x=\sqrt{2}$ 对应 $1+t=\sqrt{2}$，即 $t=\sqrt{2}-1$，所以

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x+x^2}{x}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{\sqrt{2}-1}^1\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t\\&=I-\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=I-\tfrac{1}{2}I=\tfrac{1}{2}I.\end{aligned}$$

两方都等于 $\frac{1}{2}I$，所以两者相等，这就是所要证明的结果。

验算

- $k=0$：$I=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2$，而最后那个恒等式的两方都是 $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$，正如所料。
- $k=1$：$I=\int_1^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x=2-2\ln 2\approx 0.61371$。对 I 的全部五个形式，以及最后那个恒等式的两方，使用辛普森法则（Simpson's rule）计算，结果吻合至小数点后十位（每一方都是 ≈ 0.30685）。对于非整数和负数的 k，例如 $k=0.5$、$k=-0.7$ 和 $k=4.3$，结果同样吻合。

常见错误

- 把 $\cos\theta + \sin\theta$ 写成单一个余弦时漏掉因子 $\sqrt{2}$，结果多出一个 $2^{(k+1)/2}$。
- 试图求出 I 的值。对一般的 k，它并没有闭合形式（closed form），也不需要有：每一步都只是变量代换或对称性。
- 在推论中，没有留意到右方只是 I 的一部分，需要用上“由此得出”的那个结果才能完成。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 2/(1+t)$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），又称分式线性变换（fractional linear transformation）。这类映射把圆和直线送到圆和直线，对于由二次式构成的被积函数，它们是最自然的变量代换。找出被积函数隐藏的对称性，就像这里的 $\theta \mapsto \frac{1}{4}\pi - \theta$，是计算没有初等原函数（antiderivative）的定积分（definite integral）时的常用技巧。想进一步了解莫比乌斯变换，可阅读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析）。想看更多这种风格的积分，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。