详细解答

STEP II 1988，第 6 题

纯数学 · 双曲函数不等式

STEP II 1988，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q6

关键思路

三个函数在 $x = 0$ 时的值都是零，所以只需证明它们在 $x > 0$ 时递增（increasing）便可。题目中各导数（derivative）是刻意安排的，使每一部分都为下一部分铺路：(ii) 的导数包含 (i) 的函数，而 (iii) 的导数则是 (ii) 经重新缩放后的版本。至于 f，对数微分法（logarithmic differentiation）把 f′ 的正负号化为 (iii) 中函数的正负号，这显然正是设置该部分的用意。

解答

以下我们一直使用这个原理：若 $F(0) = 0$ 且对所有 $x > 0$ 都有 $F'(x) > 0$，则对所有 $x > 0$ 都有 $F(x) > 0$。（根据中值定理（mean value theorem），存在某个 $\xi \in (0, x)$ 使得 $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$。）

第 (i) 部分

设 $g(x) = x - \tanh x$。则 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x,$$

这里用了 $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$。当 $x > 0$ 时，我们有 $\tanh x > 0$，所以 $g'(x) > 0$。因此当 $x > 0$ 时，$x - \tanh x > 0$。

第 (ii) 部分

设 $h(x) = x\sinh x - 2\cosh x + 2$。则 $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$，且

$$h'(x) = \sinh x + x\cosh x - 2\sinh x = x\cosh x - \sinh x = \cosh x\,(x - \tanh x).$$

当 $x > 0$ 时，$\cosh x > 0$，而且由第 (i) 部分知 $x - \tanh x > 0$，所以 $h'(x) > 0$。因此当 $x > 0$ 时，$h(x) > 0$。

第 (iii) 部分

设 $k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$。则 $k(0) = 0$，且

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

想一想 这个组合我们在哪里见过?

令 $u = 2x$，上式便是 $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\,(u\sinh u - 2\cosh u + 2) = 2h(u)$。所以

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{对于} x > 0,$$

这是由第 (ii) 部分得出的，因为 $2x > 0$。因此当 $x > 0$ 时，$k(x) > 0$。

f 没有转向点

当 $x > 0$ 时，$\mathrm{f}(x)$ 中每个因子都是正数，所以 $\mathrm{f}(x) > 0$，我们可以取对数:

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

求导，得

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

现在把分子用倍角表示，利用 $\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$、$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$ 和 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$:

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x). \end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{\mathrm{f}(x)\,(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

当 $x > 0$ 时，由第 (iii) 部分知括号内的式子为正，而 $\mathrm{f}(x)$、x、$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 全部为正。所以对每个 $x > 0$ 都有 $\mathrm{f}'(x) < 0$：f' 永不为零，故 f 没有转向点（turning point），事实上 f 在 $x > 0$ 上严格递减。

草图

我们需要知道曲线在两端的表现。

当 $x \to 0^+$ 时：$x/\sinh x \to 1$ 且 $(\cosh x)^{1/3} \to 1$，所以 $\mathrm{f}(x) \to 1$。更仔细地说，$(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ 而 $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$，所以 x^2 项互相抵消；每个级数再多取一项，便得

$$\mathrm{f}(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6).$$

所以曲线离开（不包括在内的）点 $(0,1)$ 时非常平坦，斜率为零。

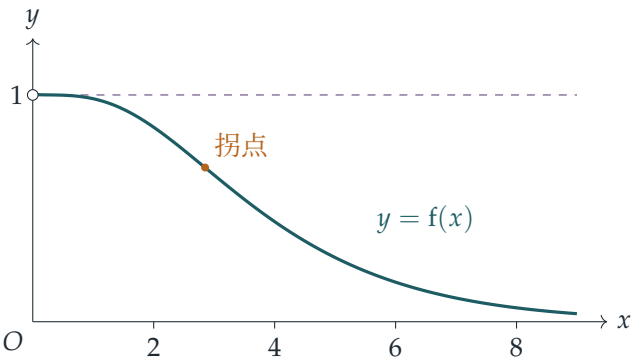
当 $x \to \infty$ 时：$\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$ 且 $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$，所以

$$\mathrm{f}(x) \sim \frac{x\,(\frac{1}{2}e^x)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0,$$

因为指数函数的增长胜过 x 的幂。x-轴是一条渐近线（asymptote），而由于 $\mathrm{f} > 0$，曲线始终在它的上方。

> **想一想** 曲线开始时平坦，结束时也平坦，却一直递减。这必然导致甚么？

在 0 附近，曲线向下弯（它是 $1 - x^4/45$）；而当 x 很大时，它是一个衰减的指数函数，向上弯。所以两者之间必定至少有一个拐点（point of inflection）；数值计算显示恰有一个，在 $x \approx 2.85$ 附近，该处 $\mathrm{f} \approx 0.68$。一些函数值：$\mathrm{f}(1) \approx 0.983$，$\mathrm{f}(2) \approx 0.858$，$\mathrm{f}(4) \approx 0.441$，$\mathrm{f}(6) \approx 0.174$。



验算

- 在 $x = 1$ 处：$1 - \tanh 1 \approx 0.238$、$\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$ 和 $2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$，全部为正。
- 恒等式 $\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$ 可在任何一点检验：在 $x = 1$ 处两边都约为 -0.0592，而 f 的数值导数亦与此吻合。
- 数值上，当 x 很小时 $(1 - \mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$，而当 x 很大时 $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$。

常见错误

- 只证明导数为正，却忘记检查函数在 $x = 0$ 时为 0；两者缺一不可。
- 试图直接用商法则和积法则对 f 求导。这样做是可行的，但对数导数简洁得多，而且能让人看清它与 (iii) 的联系。
- 把曲线画成穿过 x-轴，或从原点出发。曲线从高度 1 开始（但取不到这个值），并且一直保持为正。

STEP 之外

由 $F(0) = 0$ 和 $F' > 0$ 证明 $F(x) > 0$ 的技巧，正是中值定理的实际应用；而把它连环使用（如本题般依次经过 k'、h'、g'），是分析学中证明函数之间不等式的标准方法。展开式 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$ 让我们初尝运算幂级数（power series）的滋味，大学一年级的分析课程会为此奠定严格的基础。要阅读这两方面的内容，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是个好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。