详细解答

STEP II 1988，第 5 题

纯数学 · 单位根与正切

> **STEP II 1988，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q5

关键思路

设 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，并用二项式定理（binomial theorem）展开 z^7。其虚部（imaginary part）是 $\sin 7\theta$，把它除以 $\cos^7\theta$ 后，就变成 $t = \tan\theta$ 的多项式。七次单位根（roots of unity）令 $\sin 7\theta$ 等于零，于是我们毫不费力就得到一个 7 次多项式的七个根。之后，正切之积不过是各根之积，可以直接从常数项读出。

解答

六次方程的根

由棣美弗定理（de Moivre's theorem），$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$。设 $c = \cos\theta$，$s = \sin\theta$。用二项式定理展开左方，并只保留含 $\mathrm{i}s$ 奇数次幂的项，得

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

只要 $\cos\theta \neq 0$，我们就可以除以 c^7，并设 $t = \tan\theta$：

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$ 的根是 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，其中 $\theta = \frac{2k\pi}{7}$，而对这些角有 $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$，即 $z^7 = 1$ 的虚部。改用 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，$k = 0, 1, \ldots, 6$，会较为简洁，这同样给出 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$（而且得到的正切值集合相同，因为 tan 的周期是 π）。

对上述每一个 θ：

- $\cos\theta \neq 0$，因为 $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$ 需要 $2k = 7$；所以 $(*)$ 成立；

► $\sin 7\theta = 0$，所以由 $(*)$ 可知，$t = \tan\frac{k\pi}{7}$ 这个数是 $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$ 的根。

$\tan\frac{k\pi}{7}$ $(k = 0, \ldots, 6)$ 这七个值互不相同：各角 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$ 是 $[0, \pi)$ 中互不相同的点，没有一个等于 $\frac{\pi}{2}$，而 tan 在 $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ 上是一对一（one-to-one）的（在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上为正且递增，在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上为负，同样递增，两段的取值范围分别是 $[0, \infty)$ 和 $(-\infty, 0)$）。

? **想一想** 我们怎样知道已经找到所有的根，而不只是其中一部分？

一个 7 次多项式最多有 7 个根。我们已找到 7 个互不相同的根，所以这就是全部的根。$k = 0$ 给出 $t = 0$，即来自因式 t 的那个根。因此 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$ 的根恰好是

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

也就是 $\pm\tan\frac{\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{2\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{3\pi}{7}$，因为 $\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$。

乘积 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

对于偶数次的首一多项式（monic polynomial），各根之积等于常数项。所以

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

亦即

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

三个角都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内，所以每个正切值都是正数，而乘积就是正平方根：$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$。

现在利用 $\tan(\pi - x) = -\tan x$：$\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$ 及 $\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$。两个负号互相抵消，所以

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

正如所求。

$n = 9$ 和 $n = 11$ 的情况

同样的论证适用于任何奇数 $n = 2m + 1$。取 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 的虚部，再除以 $\cos^n\theta$，得

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

其中 q_n 的次数是 $2m = n - 1$，首项系数（leading coefficient）是 $(-1)^m$，常数项是 $\binom{n}{1} = n$。具体写出来，

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

与之前完全一样（n 是奇数，所以没有任何 $\frac{k\pi}{n}$ 等于 $\frac{\pi}{2}$），q_n 的根就是 $n-1$ 个互不相同的数 $\tan\frac{k\pi}{n}$，$k=1,\dots,n-1$，它们可配对成 $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$，其中 $k=1,\dots,m$。由于次数是偶数，q_n 各根之积是（常数项）/（首项系数）：

$$(-1)^m\prod_{k=1}^{m}\tan^2\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{(-1)^m}\quad\Longrightarrow\quad\prod_{k=1}^{m}\tan\frac{k\pi}{n}=\sqrt{n},$$

这里取正根，因为这些角全都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内。当 $n=9$ 时，这就是 q_9 的常数项 9 除以首项系数 1；当 $n=11$ 时，则是 $11/(-1)=-11=(-1)^5\prod\tan^2$。无论哪种情况，$\tan\frac{k\pi}{n}$ 对 $k=1,\dots,m$ 的乘积，在 $n=9$ 时是 3，在 $n=11$ 时是 $\sqrt{11}$。

> **想一想** 题目所求的乘积，其角是 $\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\dots$，而不是 $\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots$。我们怎样由一个转到另一个？正负号又会怎样变化？

每个偶数倍 $2j\le m$ 本来就在 $1,\dots,m$ 这列数之中。每个偶数 $2j>m$（即 $2j>\frac{n}{2}$）给出 $\tan\frac{2j\pi}{n}=-\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$，而 $n-2j$ 是奇数，且不超过 m。由 1 到 m 的每个数都恰好这样出现一次，因为偶数来自第一类，奇数来自第二类。所以所求的乘积是 $\pm\sqrt{n}$，而介乎 $\frac{n}{2}$ 与 n 之间的每个偶数各带来一个负号。

- $n=9$：偶数有 $2,4,6,8$；其中大于 4.5 的是 $6,8$，共两个负号。所以
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}=\sqrt{9}=3.$$
- $n=11$：偶数有 $2,4,6,8,10$；其中大于 5.5 的是 $6,8,10$，共三个负号。所以
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11}=-\sqrt{11}.$$

（当 $n=7$ 时，大于 3.5 的偶数是 $4,6$，共两个负号，所以该乘积是正数。）

验算

- $n=9$ 有一个简单的局部验算：$\tan\frac{6\pi}{9}=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，而数值上 $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}\approx 0.8391\times 5.6713\times(-0.3640)\approx -1.732=-\sqrt{3}$，所以总乘积是 3。
- 用计算机计算，$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}\approx 2.645751$，而 $\sqrt{7}\approx 2.645751$；$n=11$ 的乘积是 $\approx -3.316625=-\sqrt{11}$。
- 代入 $\tan\frac{\pi}{7}\approx 0.4816$，得 $t^6-21t^4+35t^2-7\approx 0$，与预期相符。

常见错误

- 除以 $\cos^7\theta$ 时没有检查它不等于零，或者没有论证七个正切值互不相同。缺少这几点，就未能证明已经找到所有的根。

- 把 $n = 11$ 的正负号弄错：乘积的平方很容易求得，但正负号要靠数清楚有多少个负的正切值来决定。
- 忘记 $a_d t^d + \cdots + a_0$ 各根之积是 $(-1)^d a_0 / a_d$；这在 $n = 11$ 时尤其重要，因为其首项系数是 -1。

STEP 之外

$\tan \frac{k\pi}{n}$ 这些数都是代数数（algebraic number），而多项式 q_n（当 n 是质数时）就是它们在有理数上的最小多项式（minimal polynomial）。像 $\prod \tan \frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$ 这类恒等式，其实是高斯和（Gauss sums）的影子；高斯和说明 $\sqrt{\pm p}$ 位于由 p 次单位根生成的域（field）之中，这是代数数论（algebraic number theory）的一块基石。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是进入这一系列想法的平易入门读物，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则让人从几何角度感受单位根。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。