详细解答

STEP II 1988，第 4 题

纯数学 · 阿根图上的轨迹

> **STEP II 1988，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q4

关键思路

把复数写成 $a+\mathrm{i}b$，再把“实数”或“虚数”这个条件化为一条关于 a 和 b 的实方程。这样便会在阿根图（Argand diagram）上得到一条熟悉的曲线。接着，把平方看成平面上的一个映射（map），将 x 和 y（或 p 和 q）用 a 和 b 表示，然后消去参数，便可找出该曲线被映射到哪里。

关于题目的印刷文字，要说明一点：原文写的是 w^2-2x，但 x 在该处尚未引入，而最后部分（出现 t^2-2t）显示了题目原意的条件。我们把它理解为w^2-2w 是实数。

解答

第 (i) 部分

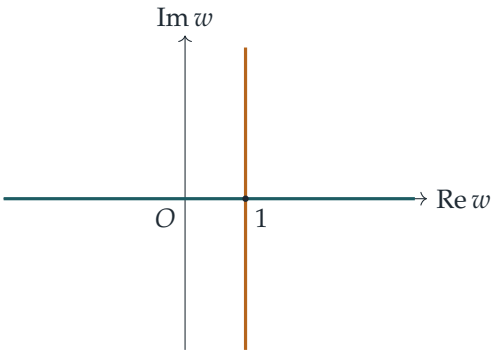
设 $w=a+\mathrm{i}b$，其中 a,b 为实数。则

$$w^2-2w=(a^2-b^2-2a)+\mathrm{i}\,(2ab-2b)=(a^2-b^2-2a)+2\mathrm{i}\,b(a-1).$$

这个数是实数，当且仅当其虚部（imaginary part）为零，即

$$b(a-1)=0,\qquad \text{即}\qquad b=0\ \text{或}\ a=1.$$

因此 w 的轨迹（locus）是实轴（real axis）连同垂直线 $\mathrm{Re}\,w=1$。两条直线相交于 $w=1$。



第 (ii) 部分

我们把两条直线分开来逐一平方。

实轴。若 $b = 0$，则 $w = a$ 是实数，而 $w^2 = a^2$。所以 $y = 0$ 及 $x = a^2 \geq 0$，而当 a 取遍所有实数时，a^2 会取遍 $[0, \infty)$ 内的每一个值。轨迹的这一部分是非负的 x 轴：即半直线（half-line）$y = 0$，$x \geq 0$。

直线 $a = 1$。若 $w = 1 + \mathrm{i}b$，则

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{所以} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

利用 $b = \frac{1}{2}y$ 消去参数，得

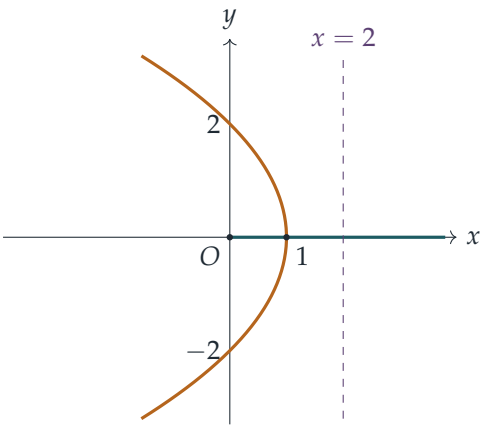
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{或} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

只要取 $b = \frac{1}{2}y$，这条曲线上的每一点都能取到。它是一条抛物线（parabola），其轴沿 x 轴，顶点（vertex）在 $(1, 0)$，开口朝向 x 的负方向。与标准式 $Y^2 = 4cX$ 比较，这里 $c = -1$，而 $X = x - 1$。所以焦点（focus）在 $X = -1$，即原点；准线（directrix）是 $X = 1$，即直线 $x = 2$。事实上 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$，所以曲线上每一点与 O 的距离都等于它与直线 $x = 2$ 的距离。抛物线与 y 轴相交于 $(0, \pm 2)$。

? **想一想** 为甚么这条半直线不会延伸到 x 的负值?

w 平面上的实轴被覆盖了两次（分别由 a 和 $-a$），但实数的平方永远不会是负数。所以整条实轴对折到非负的那一半上。同样地，直线 $\mathrm{Re}\, w = 1$ 只覆盖抛物线一次，因为 $b \mapsto 2b$ 是一对一（one-to-one）的。

所以 (x, y) 的轨迹是抛物线 $y^2 = 4(1 - x)$（焦点在原点，准线为 $x = 2$），连同半直线 $y = 0$，$x \geq 0$。这条半直线由焦点出发，穿过顶点 $(1, 0)$；该顶点是 $w = 1$ 的像，亦即第 (i) 部分两条直线的交点的像。



最后部分

设 $t = a + \mathrm{i}b$。这里的“虚数”是指纯虚数（purely imaginary），所以我们需要 $t^2 - 2t$ 的实部（real part）为零：

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{即} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

所以 t 位于一条以 1 为中心的等轴双曲线（rectangular hyperbola）上，其顶点在 $t = 0$ 和 $t = 2$。在这条曲线上，$b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$，所以 $a \leq 0$ 或 $a \geq 2$。

现在由 $t^2 = p + \mathrm{i}q$ 得

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

其中我们用了双曲线的方程 $a^2 - b^2 = 2a$ 来化简 p。所以 $a = \frac{1}{2}p$，于是

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{所以} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

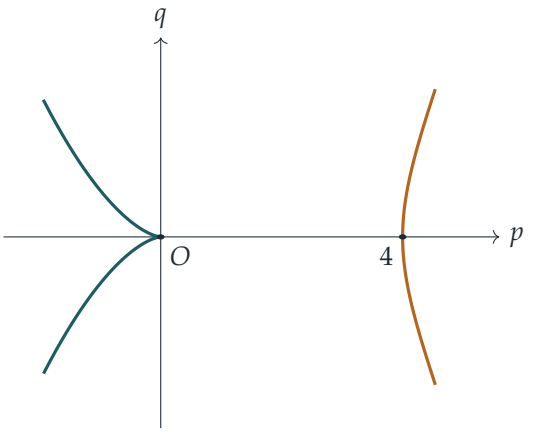
条件 $a \leq 0$ 或 $a \geq 2$ 变成 $p \leq 0$ 或 $p \geq 4$，这正好就是 $p^3(p-4) \geq 0$ 成立的范围。反过来，在这条曲线上任取一点。若 $p \neq 0$，设 $a = \frac{1}{2}p$ 及 $b = q/p$。则 $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$，所以 t 在双曲线上，而且 $t^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = p + \mathrm{i}q$。若 $p = 0$，则 $q = 0$，而这一点来自 $t = 0$。所以轨迹就是整条曲线

$$4q^2 = p^3(p-4).$$

它的形状：

- 它对 p 轴对称，因为方程中只出现 q^2。
- 在 $0 < p < 4$ 的范围内没有任何点。曲线分为两段，分别来自双曲线的两支。
- 右边一段由 $(4, 0)$ 开始，该点是 $t = 2$ 的像。在该点附近 $q^2 \approx 16(p-4)$，所以切线（tangent）是垂直的。

- 左边一段通过原点，即 $t = 0$ 的像。在该点附近 $q^2 \approx -p^3$，所以 $|q| \approx |p|^{3/2}$，形成一个指向右方的尖点（cusp），两臂都与 p 轴相切。
- 当 $|p|$ 很大时，$|q| \approx \frac{1}{2}p^2$，所以两段都像抛物线般向外张开。



（图中纵向比例经过压缩。蓝绿色的一段来自双曲线上 $\operatorname{Re} t \le 0$ 的一支，琥珀色的一段来自 $\operatorname{Re} t \ge 2$ 的一支。）

验算

- 第 (i) 部分：$w = 1 + 2\mathrm{i}$ 给出 $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$，这是实数。第 (ii) 部分：它的平方 $-3 + 4\mathrm{i}$ 满足 $16 = 4(1 - (-3))$。
- 最后部分：$t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ 满足 $1 - 3 + 2 = 0$。它的平方是 $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而 $4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p - 4)$。
- 我们以数千个随机点作了数值检验，确认每个轨迹都映射到所述的曲线上，而且每条曲线上的每一点都能取到。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记了实轴，以致在第 (ii) 部分漏掉那条半直线。又或者画了整条 x 轴，而不是只画 $x \ge 0$ 的部分。
- 没有利用 $a^2 - b^2 = 2a$ 来得出 $p = 2a$。不用这一步的话，消去参数的过程会繁复得多。
- 在最后的草图中漏掉了 $0 < p < 4$ 的空隙，或原点处的尖点。

STEP 之外

平方映射 $z \mapsto z^2$ 是最简单的保角映射（conformal map）。它把角度加倍，这就是为甚么这里的直线和双曲线会变成抛物线和带尖点的曲线。在 $z = 0$ 处导数为零，角度不再保持不变，尖点正是由此而来。在流体流动和静电学中，有一个标准技巧，就是利用这类映射把难处理的区域变成容易处理的区域。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《视觉复分析》）以图像把这些映射解释得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。