详细解答

STEP II 1988，第 3 题

纯数学 • 根的对称性

STEP II 1988，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q3

关键思路

不要先从系数入手，而应先考虑根的集合。题目的性质是说，根的集合在运算 $k \mapsto 1/k$ 之下保持不变，所以两个根要么互换，要么各自不动。加入第二个运算 $k \mapsto 1-k$ 后，同样的推理可以再用一次。至于三次方程，把这两个运算反复施行，由一个根最多可得出六个值，而三次方程只容得下三个根：因此各根必须落在特殊的点上，使六个值之中有些重合。

解答

倒数性质

设两根为 α 和 β（可能相等，也可能是复数），则 $\alpha+\beta=-b$ 及 $\alpha\beta=c$。首先，0 不可能是根，因为 0^{-1} 不存在；所以 $c \neq 0$。

映射（map）$k \mapsto 1/k$ 必须把每个根送到一个根，所以 $1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$。

- 若 $1/\alpha=\beta$，则 $\alpha\beta=1$，即 $c=1$。反过来，若 $c=1$，则两根皆非零，且 $\beta=1/\alpha$，所以每个根的倒数（reciprocal）就是另一个根，而这性质对任何实数 b 都成立。（这包括 $b=\mp 2$ 时的重根（repeated root）± 1，以及 $|b|<2$ 时位于单位圆（unit circle）上的复数根。）
- 若 $1/\alpha=\alpha$ 但 $1/\alpha \neq \beta$，则 $\alpha=\pm 1$ 且 $\alpha\beta \neq 1$。把这性质应用于 β：它的倒数不是 α（因为 $\alpha\beta \neq 1$），所以 $1/\beta=\beta$，于是 $\beta=\pm 1$ 亦然。由于 $\alpha\beta \neq 1$，两根必定是 1 和 -1，得出 $x^2-1=0$：$b=0$，$c=-1$。这方程确实具有该性质。

所以该性质成立，当且仅当

$$c = 1 \ (b \text{ 为任何实数}), \qquad \text{或} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

加入性质 $k \mapsto 1 - k$

以 $1 - k$ 取代 $1/k$，重复同样的论证：要么 $1 - \alpha = \beta$，于是 $\alpha + \beta = 1$；要么两根都不动，即 $1 - \alpha = \alpha$ 及 $1 - \beta = \beta$，于是 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$，同样有 $\alpha + \beta = 1$。无论哪种情况都有 $b = -1$；反过来，$b = -1$ 使两根成为 α 和 $1 - \alpha$，所以该性质成立。

$b = 0$、$c = -1$ 这情况不符合此条件，所以我们需要 $c = 1$ 及 $b = -1$：

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

得出 $x^2 - x + 1 = 0$，其根为 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。每个根的模（modulus）都是 1，实部都是 $\frac{1}{2}$，所以 $1/k$ 和 $1 - k$ 都等于共轭复数（complex conjugate）$\bar{k}$，即另一个根。

三次方程

现设 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的系数为实数，并同时具有两个性质。一如之前，0 不是根，1 也不是（否则 $1 - 1 = 0$ 便会是根）。

实系数三次方程至少有一个实根，称之为 a。反复施行这两个运算，以下每一个都是根：

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}, \quad \frac{1}{(a - 1)/a} = \frac{a}{a - 1}.$$

（第四个是第三个的倒数，第五个是 1 − 第二个，第六个是第五个的倒数。）这是六个实数，但三次方程最多只有三个相异的根，所以其中必有两个重合。

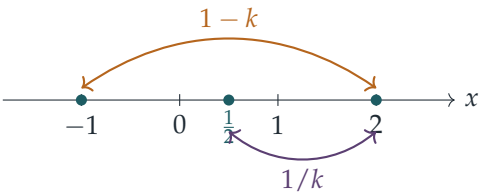
> **想一想** “其中两个相等”这句话，怎样确定 a 的值?

把这六个映射称为 $f_1, \ldots, f_6$，其中 f_1 为恒等映射（identity）。每一个映射的逆映射（inverse）都在这列表之中：$\frac{1}{k}$、$1 - k$ 和 $\frac{k}{k-1}$ 各自是自己的逆映射，而 $\frac{1}{1-k}$ 和 $\frac{k-1}{k}$ 则互为逆映射。还可以验证，把任意两个映射复合（compose），所得的仍是列表中的映射。所以若 $f_i(a) = f_j(a)$ 而 $i \neq j$，施以 f_i^{-1} 便得 $a = g(a)$，其中 $g = f_i^{-1} \circ f_j$ 是六个映射之一，且不是恒等映射。所以 a 是五个非恒等映射其中之一的不动点（fixed point）：

$$\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1, \qquad \frac{1}{1-a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$1 - a = a \iff a = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{a-1}{a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$\frac{a}{a-1} = a \iff a(a - 2) = 0.$$

二次式 $a^2 - a + 1$ 没有实根（它就是先前的那个二次式），而 $a \neq 0, 1$。因此 $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$。

无论 a 是其中哪一个，上面六个值恰好取遍 -1、2 和 $\frac{1}{2}$：映射 $1 - k$ 把 -1 和 2 互换，并保持 $\frac{1}{2}$ 不动；而 $1/k$ 则把 2 和 $\frac{1}{2}$ 互换，并保持 -1 不动。



所以 -1、2 和 $\frac{1}{2}$ 是该三次方程的三个相异根。首一（monic）三次多项式由它的三个根完全决定，所以它必定是

$$(x+1)(x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = (x^2-x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1.$$

反过来，这个三次方程确实具有两个性质，因为它的根集 $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ 在 $k \mapsto 1/k$ 和 $k \mapsto 1-k$ 之下都被送回自身。所以

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 = 0$$

是唯一符合条件的三次方程，正如题目所求。

验算

代入 $x=2$：$8-6-3+1=0$；$x=-1$：$-1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1=0$。各根之积为 $-1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -1 = -r$，各根之和为 $\frac{3}{2} = -p$。留意这三次方程的系数，除正负号外，顺读和倒读都一样（$1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1$）：这种回文（palindromic）形状正是 $k \mapsto 1/k$ 所必然导致的。以电脑测试 20,000 组随机的 (b, c)，结果印证了倒数条件；而随机选取远离 $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$ 的实数 a，每次都得出六个相异的值。

常见错误

- 第一部分只答“$c=1$”：每个根都是自身倒数的那种情况，还会多出 $b=0$、$c=-1$。
- 忽略了 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 这一对根，它在两个映射之下都是封闭的。正是由实根出发，才能把它排除：实系数三次方程必有一个实根，而该实根的六个值不可能包含这两个数。
- 只证明了题目给出的三次方程符合条件；题目要求的是证明它是唯一的一个。

STEP 之外

六个映射 $k \mapsto k$, $1/k$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$ 在复合运算下构成一个群（group），它是对称群（symmetric group）S_3 的一个复本；它置换 $0, 1, \infty$ 这三个点，而那六个值就是四个

点的交比（cross-ratio）所有可能的取值。计数的那一步正是轨道－稳定子定理（orbit–stabiliser theorem）：只有在被某个非恒等元素固定的点上，轨道（orbit）的长度才会少于六。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）阐述群在集合上的作用，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（复分析的视觉化讲解）则把这些映射展示为平面上的莫比乌斯变换（Möbius transformation）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。