详细解答

STEP II 1988，第 2 题

纯数学 · 对称代数方程

> **STEP II 1988，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q2

关键思路

先去分母，再把两条方程相减。右边的平方差（difference of two squares）会产生因式 $y-z$，正好与左边出现的 $y-z$ 对应，而假设 $y \neq z$ 恰恰让我们可以把它约去。此后，一切都归结为一条关于 x、y 和 z 的对称式（symmetric expression），余下的工作就交给对称性完成。

解答

证明 $x+y+z=a$

由于 $y \neq 0$ 及 $z \neq 0$，我们可以把两边乘开：

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

由 (1) 减去 (2)，并在右边运用平方差，

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= [(z-x)-(x-y)][(z-x)+(x-y)] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

左边是 $(y-z)[2a-3(y+z)]$，所以

$$(y-z)[2a-3(y+z)] = -(y-z)(y+z-2x).$$

想一想 究竟在哪一步需要用到 $y \neq z$?

就在这里：因为 $y - z \neq 0$，我们可以把它除去，得到

$$2a - 3y - 3z = 2x - y - z \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2x + 2y + 2z,$$

所以 $x + y + z = a$，正如所求。

证明第三条方程

把 $a = x + y + z$ 代回 (1)：

$$y(2x + 2y + 2z - 3y) = (z - x)^2 \implies 2xy - y^2 + 2yz = z^2 - 2zx + x^2,$$

整理后得

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0. \tag{3}$$

最引人注目的是，(3) 对 x、y 和 z 是对称的。现在看看我们要证明甚么。由于 $x \neq 0$，方程 $2a - 3x = \dfrac{(y-z)^2}{x}$ 等价于

$$x(2a - 3x) = (y - z)^2,$$

而代入 $a = x + y + z$ 后，这就是

$$x(2y + 2z - x) = y^2 - 2yz + z^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

这正是 (3)。因此

$$2a - 3x = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

(事实上，三条方程都只是 (3) 连同 $a = x + y + z$，各自从其中一个变量的角度写出来而已。)

当 $y = z$ 时，最后一条方程可以成立吗?

可以。若 $y = z$，题目给出的两条方程变成同一条方程 $2a - 3y = \dfrac{(y-x)^2}{y}$，而最后一条方程则变成 $2a - 3x = 0$，即 $a = \frac{3}{2}x$。把 $a = \frac{3}{2}x$ 代入第一条方程，

$$3x - 3y = \frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x - y) = (x - y)^2 \iff (x - y)(x - 4y) = 0.$$

所以，举例说，$x = y = z = 1$ 及 $a = \frac{3}{2}$ 满足全部三条方程：

$$2a - 3y = 0 = \frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a - 3z = 0 = \frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a - 3x = 0 = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

另一个例子是 $x=4$、$y=z=1$、$a=6$：这时头两条方程都有 $2a-3y=9=\frac{(1-4)^2}{1}$，而 $2a-3x=0=\frac{0^2}{4}$。

所以，最后一条方程并非仅当 $y\neq z$ 时才成立：条件 $y\neq z$ 保证它成立，但当 $y=z$ 时它也可以成立。当 $y=z$ 时失去的是这个保证。例如 $x=1$、$y=z=2$、$a=\frac{13}{4}$ 满足题目给出的两条方程（两边各等于 $\frac{1}{2}$），但 $2a-3x=\frac{7}{2}\neq 0$。还要留意，第一个例子中 $x+y+z=3\neq a$，所以当 $y=z$ 时，连第一个结论也可能不成立。

验算

- 取 $x=9$、$y=4$、$z=1$，它们满足 (3)：$81+16+1-72-8-18=0$。这时 $a=14$，而 $2a-3y=16=\frac{(1-9)^2}{4}$、$2a-3z=25=\frac{(9-4)^2}{1}$ 及 $2a-3x=1=\frac{(4-1)^2}{9}$。三条方程全部成立。
- 一次数值检验在 10,000 组随机有理数三元组上精确地验证了恒等式 $(1)-(2)=(y-z)\big(2a-2(x+y+z)\big)$，并在 (3) 上约 1,900 个满足 $y\neq z$ 的随机点确认了全部三条方程，另加上文三个 $y=z$ 的例子。

常见错误

- 除以 $y-z$ 而不说明为何可以这样做。题目之所以给出这个假设，全是为了这一步。
- 最后一部分只答“不可以”或“可以”而没有举例。只要明确给出一组 $y=z$ 的三元组，问题便解决了。
- 以为 $y=z$ 会令最后一条方程不成立。它只是令保证消失而已。

STEP 之外

方程 (3) 是一个二次型（quadratic form），它的零点集是 (x,y,z) 空间中的一个双锥面（double cone）。若 $x,y,z>0$，设 $x=p^2$、$y=q^2$、$z=r^2$：则 (3) 可因式分解为

$$-(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)=0,$$

这是边长为 p,q,r 的三角形面积平方的 16 倍（希罗公式，Heron's formula）。所以 (3) 的意思是 $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$ 构成一个退化三角形（degenerate triangle），例如上面验算中的 $\sqrt{9}=\sqrt{4}+\sqrt{1}$。二次型及其分类是大学一年级线性代数（linear algebra）的标准课题；参见 Strang，*Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。