详细解答

STEP II 1988，第 14 题

力学 • 转动的刚体

STEP II 1988，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q14

关键思路

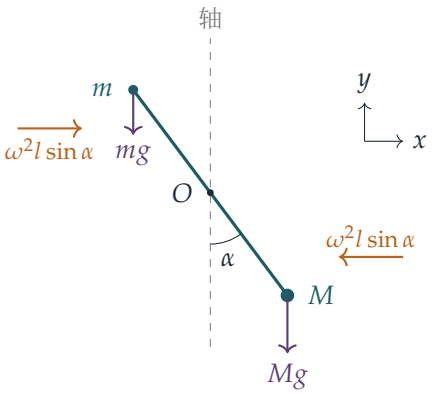
在稳定状态（steady state）下，相对于包含杆的那个旋转铅垂平面，一切都静止不动，所以每个质点（particle）只是以恒定速率沿水平圆周运动。这样每个质点的加速度就完全确定了。接着由牛顿第二定律（Newton's second law）可知杆对每个质点所施的力，再加上关于轻杆（light rod）的两个事实，问题便迎刃而解：作用于轻杆的各力必须平衡，而且（因为杆可绕轴自由摆动）这些力对轴的力矩（moment）也必须平衡。

解答

模型。 把两个质量视为装在轻质刚性杆上的质点，杆在 O 处光滑地枢接，因此轴不会沿其自身方向施加力偶（couple）。我们在包含杆的铅垂平面内讨论，这个平面以角速率（angular speed）ω 绕通过 O 的铅垂线转动。取 x 为此平面内的水平方向，y 为铅垂向上，原点为 O。

设 M 位于 $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$，$m$ 位于 $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$；稍后便会看到，较重的质点必定是在下方的那个。每个质点都以恒定速率，沿半径为 $l\sin\alpha$ 的水平圆周绕铅垂轴运动，所以其加速度大小为 $\omega^2 l\sin\alpha$，方向水平指向轴：

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



（琥珀色箭头表示加速度，紫红色箭头表示重量。）

杆所施的力。 设 $\mathbf{R}_M$ 和 $\mathbf{R}_m$ 分别为杆对 M 和 m 所施的力。这些力不一定沿着杆的方向：刚性杆也可以向侧面施力。由牛顿第二定律得 $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$，所以

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l\sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l\sin\alpha,\ mg\right).$$

根据牛顿第三定律（Newton's third law），两个质点对杆所施的力，在 M 的一端为 $-\mathbf{R}_M$，在 m 的一端为 $-\mathbf{R}_m$。

> ? **想一想** 轴在 O 处对杆施加一个未知的力。在不知道这个力的情况下，我们怎样取力矩?

对轴取力矩。 轴的力作用于 O，所以它对 O 没有力矩；而杆可自由摆动，所以轴沿其自身方向（即通过 O 并垂直于我们这个平面的直线）不提供力偶。轻杆本身没有角动量（angular momentum），所以两端的力对这条直线的力矩必须互相抵消。作用于 (x,y) 的力 (F_x,F_y)，其力矩为 $xF_y - yF_x$（以逆时针方向为正）。对于作用于 $(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$ 的 $-\mathbf{R}_M$：

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

而对于作用于 $(-l\sin\alpha,\, l\cos\alpha)$ 的 $-\mathbf{R}_m$：

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

令两者之和为零，并除以 $l\sin\alpha \neq 0$（因为 $\alpha > 0$）：

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

其中除以了 $\cos\alpha > 0$，这正是所需的结果。

假如 M 反而是在上方的质点，同样的计算（把 M 和 m 对调）会得出 $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$，这是不可能的。所以较重的质点确实如所假设的那样，位于 O 的下方。

轴所受的反作用力。 杆是轻的，所以作用于它的合力为零：轴对杆所施的力为 $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$，因此杆对轴所施的力为

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

这个力指向下方，其水平分量则在 M 的一侧指向外。若 ϕ 是它与铅垂向下方向的夹角，则代入 ω^2 的值，可得

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

由于 $0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$，$\phi = \tan^{-1}\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$，这就是所需的结果。

验算

- 若 $m = 0$，这个系统就是一个长度为 l 的圆锥摆（conical pendulum），而公式给出我们熟悉的 $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$。这时反作用力的角度为 α：杆沿着自身方向拉，就像一条绳一样。
- 若 $M = m$，杆在 O 处平衡，所以 $\omega = 0$，反作用力是铅垂的，大小为 $2Mg$；两条公式都与此相符。
- 数值上，取 $M = 3$、$m = 1$、$l = 0.7$、$\alpha = 0.6$ 和 $g = 9.8$，可得 $\omega^2 \approx 8.48$，反作用力的角度约为 9.71°。把杆的角度所满足的运动方程（equation of motion）由静止于 α 开始逐步数值计算，角度一直保持在 α；而在三维空间中由两个质点的位置计算它们的加速度，亦得出相同的角度。

常见错误

- 假设杆对质点所施的力沿着杆的方向。事实并非如此：刚性杆可以传递侧向的力，这正是我们要取力矩的原因。
- 忘记了 m 的加速度同样指向轴，因此与 M 的加速度位于相反的一侧。反作用力的水平分量会部分抵消，得出的是 $M-m$ 而不是 $M+m$。
- 把较重的质点放在上方。力矩方程显示这种情况不可能发生。

STEP 之外

杆对 O 的角动量并不平行于铅垂的自转轴，所以它会随着系统旋转而改变方向。要改变角动量就需要力偶，而这个力偶由轴提供，其方向垂直于我们刚才所用的那个方向。这就是运用惯性张量（inertia tensor）的刚体动力学（rigid-body dynamics）的起点，也解释了为甚么平衡不良的车轮会在轴承上摇晃。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对此有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。