详细解答

STEP II 1988，第 13 题

力学 · 摩擦力与平衡

STEP II 1988，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

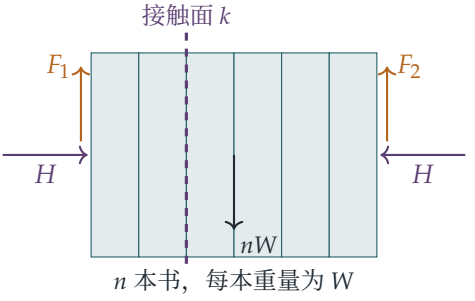
step.maths.org/questions/88-s2-q13

关键思路

托住书本的每一个垂直力都是摩擦力（friction），而任何接触面上的摩擦力都不能超过该处法向反作用力（normal reaction）的 μ 倍。因此我们需要两样东西：每个接触面上的法向反作用力（由水平方向的平衡（equilibrium）很容易求得），以及每个接触面必须提供的摩擦力（考虑适当选取的一组书本在垂直方向的平衡）。然后我们找出哪一个接触面最接近滑动。把相邻的一组书本视为一个整体，可以令代数运算保持简短。

解答

模型。 设有 n 本相同的书，每本重量为 W，书的封面保持垂直。每只手以水平力 $H \leq Q$ 压向书本，并提供向上的摩擦力；把这两个摩擦力记作 F_1（左手）和 F_2（右手）。由于每只手的垂直力正正就是这个摩擦力，所以我们需要 $F_1, F_2 \leq P$。题目指明可以忽略转动效应，因此我们只需考虑每本书或每组书本的力平衡。



法向反作用力。 把书本由左至右编号为 $1, 2, \ldots, n$，并设接触面 k 为第 k 本书与第 $k+1$ 本书之间的接触面（$1 \le k \le n-1$）。作用于第 $1, \ldots, k$ 本书这一组书本上的水平力，只有左手的推力 H 和来自第 $k+1$ 本书的法向反作用力。所以该反作用力同样是 H：每一个接触面，不论是手与书之间还是书与书之间，法向反作用力都是 H，因此每个接触面所能提供的摩擦力大小最多为 μH。

双手。 在垂直方向上，对整排书本而言，

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2 各自最多为 P（臂力），亦最多为 $\mu H \le \mu Q$（摩擦力）。记 $L = \min(P, \mu Q)$。于是 $nW = F_1 + F_2 \le 2L$，所以

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

这是必要条件。若此条件成立，最佳的做法是尽力压紧，即 $H = Q$（H 愈大，只会提高每一个摩擦力的上限），并把负荷平均分配，即 $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$。这样双手都在各自的限度之内。

? **想一想** 即使双手托得住，书本会不会在中间某处互相滑过?

书本之间的接触面。 我们直接验证这一点。对第 $1, \ldots, k$ 本书这一组书本应用垂直方向的平衡。它的重量 kW 由手提供的 $F_1 = \frac{1}{2}nW$ 以及来自第 $k+1$ 本书的摩擦力 f_k（以向上为正）所承托：

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

对于 $1 \le k \le n-1$，我们有 $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$，等号在 $k = 1$ 和 $k = n-1$ 时成立，即紧贴最外侧两本书的接触面。所以任何接触面所需的最大摩擦力为 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)W$，比每只手所提供的 $\frac{1}{2}nW$ 少 W。由于每个接触面的上限与手的一样，都是 μQ，所以只要双手不滑动，就没有任何两本书会互相滑动。（从物理上看：最外侧的每本书由手托住，而它向内传递的摩擦力，就是手的摩擦力减去它本身的重量。）

答案。 这排书本能被提起，当且仅当 $nW \le 2\min(P, \mu Q)$。所以书本数目的最大值为

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\, \mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

即同时不超过 $2P/W$ 和 $2\mu Q/W$ 的最大整数。哪一个上限起作用，便说明了是甚么限制着图书馆管理员：当 $P < \mu Q$ 时是提举的臂力，当 $\mu Q < P$ 时则是握力。

验算

- 取 $W = 10\,\mathrm{N}$、$P = 60\,\mathrm{N}$、$Q = 100\,\mathrm{N}$ 及 $\mu = 0.4$。则 $\min(60, 40) = 40$，而 $n_{\max} = 8$。有 8 本书时，每只手提供 $40\,\mathrm{N}$ 的摩擦力，刚好达到其上限，而最吃力的接触面需要 $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$。若加上第九本书，每只手便需要提供 $45\,\mathrm{N}$。
- 只有一本书（$n = 1$）时没有书本之间的接触面，我们只需要 $W \le 2\min(P, \mu Q)$，这显然是正确的。
- 我们用电脑对 W, P, Q, μ 的 3000 组随机取值求解了整组不等式（任意 $H \le Q$、任意的 F_1, F_2 分配、每一个接触面），所得的最大可行 n 每次都与公式吻合。

常见错误

- 忘记了手臂的垂直力就是摩擦力，所以 P 和 μQ 这两个限制是作用于同一个力之上。
- 未经验证便假设中间的书本是最薄弱之处。书本之间的力比双手处的力小，而不是大。
- 只给出 $2\min(P, \mu Q)/W$ 而没有取下整（floor）：答案必须是整数本书。

STEP 之外

这里的摩擦力是静不定的（statically indeterminate）：平衡条件只确定了 $F_1 + F_2$，而我们问的是有没有某一种分配方式能令每个接触面都不超出其限度。这类问题其实是小型的线性规划（linear programme），而“检查是否存在某个可容许的平衡状态”这个想法，同样是结构极限分析（limit analysis）的基础。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）是一个好去处，可以看到摩擦力与平衡如何得到严谨的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。