详细解答

STEP II 1988，第 12 题

力学 • 下落的链条

STEP II 1988，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

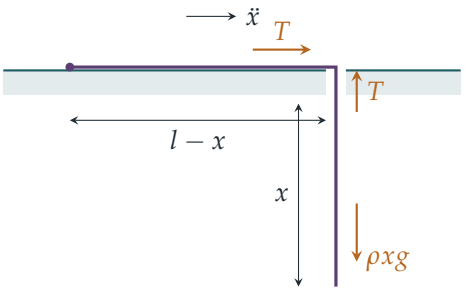
step.maths.org/questions/88-s2-q12

关键思路

由于绳子不可伸长（inextensible），绳上每一小段的速率都相同，所以整条绳子就像一个物体，而推动它的力就是垂在桌面以下那一段的重量。随着愈来愈多绳子穿过小孔，这个重量不断增大，于是得到一条以下垂长度为未知量的简单线性微分方程（linear differential equation）。它的解是双曲余弦（hyperbolic cosine），而所求的时间则由反解这个函数得出。

解答

整个系统完全没有摩擦：桌面光滑（smooth），小孔既小且光滑（所以它只改变绳子的方向，而不会沿绳子方向施加任何力），而绳子每单位长度的质量为 ρ。设在时间 t 时垂在桌面以下的长度为 x，则留在桌面上的长度为 $l-x$。起初 $x=l-d$ 且 $\dot{x}=0$，而当 $x=l$ 时绳端到达小孔顶部。由于桌子的高度大于 l，在此之前下垂部分不会碰到地面。



设 T 为绳子在小孔处的张力（tension）。由于小孔光滑，紧贴小孔上方和下方的张力同为 T。

桌面上的部分。它的质量为 $\rho(l-x)$，以加速度 $\ddot{x}$ 沿水平方向移向小孔（因为绳子不可伸长，它与下垂部分移动得一样快）。由于桌面光滑，作用在它上面的水平力只有张力 T。所以

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

下垂的部分。它的质量为 ρx，以加速度 $\ddot{x}$ 向下运动，所受的力是向下的重量 $\rho x g$ 和向上的张力 T：

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

把两条方程相加，便可消去 T：

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{即} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

想一想 小孔两边的绳子长度一直在变。对每一段分别使用 $F = ma$，真的没有问题吗？

没有问题。每条方程都是在某一瞬间，应用于该瞬间位于小孔那一边的那一段绳子；整条绳子以同一速率 $\dot{x}$ 一起运动，所以整条绳子的动量（momentum）变化率是 $\rho l\ddot{x}$，而沿运动方向有分量的外力，就只有下垂部分的重量 $\rho x g$。（桌面的反作用力抵销了水平部分的重量，而小孔只是令绳子转向。）因此合并后的方程 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$ 正是整条绳子的牛顿第二定律（Newton's second law）。下文的能量验算亦印证了这一点。

$\ddot{x} = n^2 x$ 的通解（general solution）是 $x = A\cosh nt + B\sinh nt$。由 $t = 0$ 时 $\dot{x} = 0$ 得 $B = 0$，再由 $t = 0$ 时 $x = l - d$ 得 $A = l - d$：

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

绳端在 $x = l$ 时到达小孔顶部，即在满足下式的时间 t_1：

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

由于 $l/(l-d) > 1$，此方程恰有一个正数解。利用 $\operatorname{arcosh} u = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$，有

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

所以所需时间为

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\operatorname{arcosh}\!\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\ln\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

验算

- **能量**。取桌面为势能（potential energy）的零点。下垂部分的质心（centre of mass）位于深度 $x/2$ 处，所以它的势能是 $-\frac{1}{2}\rho g x^2$。由静止开始，能量守恒（conservation of energy）给出 $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2 - (l-d)^2\right)$，对 t 求导便再次得到 $l\ddot{x} = gx$。
- d **很小**。如果 d 极小，几乎整条绳子都垂着，它应以接近 g 的加速度下落，所需时间约为 $\sqrt{2d/g}$。事实上，当 d 很小时，由 $\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$ 和 $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$ 可得 $t_1^2 \approx 2d/(n^2 l) = 2d/g$。
- $d \to l$。如果几乎没有绳子垂下，绳子几乎不会动，于是 $t_1 \to \infty$，正如对数式所显示的那样。
- **数值**。取 $l = 2\,\mathrm{m}$、$d = 1.5\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，公式给出 $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$，与对这个运动逐步进行数值积分所得的结果吻合。

常见错误

- 只对下垂部分写出 $\rho x\ddot{x} = \rho x g$，忘记了它还要拖动桌面上的绳子（换句话说，是用错了质量：被加速的是整条绳子，质量为 ρl）。
- 尝试用 $x = A\cos nt$ 形式的解：方程是 $\ddot{x} = +n^2 x$，所以运动是按指数增长，而不是振动。
- 把结束条件定为 $x = d$ 而不是 $x = l$：绳端到达小孔时，整段长度 l 都垂在下面。

STEP 之外

这是一个质量分布随时间变化的问题：总质量固定不变，但受重力驱动的那一部分随位置而改变，由此得到一条线性方程，其解为指数函数。假如绳子是从无摩擦的桌边滑落，同时有一堆原本静止的绳子不断被扯动起来，动量便会在非弹性（inelastic）的“猛扯”中损失，能量亦不再守恒；分辨这两类情况，是大学力学课程中的经典课题。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对质量流动的系统以及链条和绳索的问题有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。