详细解答

STEP II 1988，第 11 题

力学 · 绳缠绕柱子

> **STEP II 1988，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q11

关键思路

绳子未缠上圆柱的部分，总是沿切线（tangent）离开圆柱。因此质点的位置就是“接触点加上一个长度等于未缠绕绳长的切向量”，而这很容易用角 θ 表示出来。求导之后，有两项互相抵消，速度原来与绳子垂直。于是张力（tension）不做功，速率保持在初始值，而速率公式就成为一条关于 θ 的可分离变量微分方程（separable differential equation）。

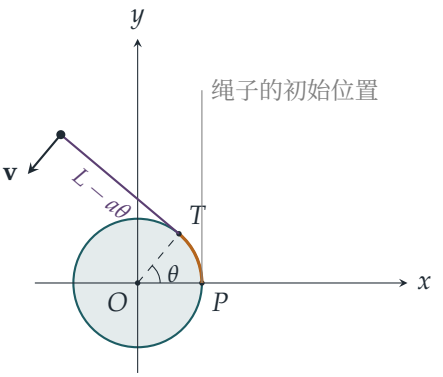
解答

建立模型

我们把质点看成光滑桌面上的一个质点（point mass），系着一条始终拉紧的轻而不可伸长的绳子（light inextensible string）。重力与法向反作用力（normal reaction）都沿铅垂方向，互相抵消，所以唯一的水平力就是张力。

取以 O 为原点的坐标轴，并把 P 放在 $(a, 0)$。绳子起初垂直于 OP，所以它在 P 处与圆柱相切，我们设质点从 (a, L) 出发。（若取镜像的情况，只是把 y 坐标的正负号反转。）当绳子沿逆时针方向缠上圆柱，缠过角 θ 之后，长度 $a\theta$ 的一段贴在由 P 起的圆弧上，而绳子离开圆柱的位置是

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$



绳子未缠上的部分长 $L-a\theta$，沿 T 处的切线伸展。指向绳子展开方向的单位切向量（unit tangent）是 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$：它垂直于 OT，而且当 $\theta=0$ 时等于 $(0,1)$，与起始位置吻合。

位置与速度

因此质点的位置向量（position vector）是

$$\mathbf{r}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta-(L-a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta+(L-a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

利用链式法则（chain rule）和乘积法则（product rule）对 t 求导，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}-a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\&=-(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

首两项互相抵消：接触点沿圆柱移动所带来的效果，恰好被未缠上的绳子缩短所抵销。

由于 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 是单位向量，$L-a\theta>0$，而且绳子缠上圆柱期间 $\dot\theta>0$，所以速率是

$$|\dot{\mathbf{r}}|=(L-a\theta)\dot\theta,$$

正是所求。

碰到圆柱所需的时间

想一想 绳子一直拉着质点，为甚么质点的速率仍会保持等于 v?

速度平行于 $(\cos\theta,\sin\theta)$，而绳子（因而张力）则沿 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ 方向。两者互相垂直，所以张力不做功。桌面光滑，张力是唯一的水平力。因此动能（kinetic energy）保持不变，速率也随之恒等于 v。张力只会改变速度的方向。

所以，在质点到达圆柱之前的所有时刻 t，

$$(L - a\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

分离变量，并由 0 积分至 t，

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

当整条绳子都缠上圆柱时，质点便碰到圆柱，即 $a\theta = L$，所以 $\theta = L/a$。于是

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

这就是所求的时间。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时，公式给出 $\mathbf{r} = (a, L)$ 及 $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$，与初始的绳子垂直，理应如此。
- 单位：$L^2/(av)$ 的单位是 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$。
- 另一个理解答案的方法：质点整条路径的长度是

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  并以恒定速率 v 走完。
- 我们用数值方法模拟了这个运动：一条非常硬的绳子缠绕在圆柱上，取 $a = 1$、$L = 3$、$v = 2$。模拟所得的时间与 $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$ 相符，误差在 10^{-5} 以内；而把 $\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$ 积分至 $a\theta = L$，得到 2.25，即 $L^2/(2av)$。

常见错误

- 使用关于 O 的角动量守恒（conservation of angular momentum）。张力并不通过 O（它沿切线作用），所以关于 O 的角动量并不守恒。能量才是合适的工具。
- 把未缠上的绳子写成沿 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向，即沿径向，而不是沿切线方向。
- 忘记速率公式需要 $\dot{\theta} > 0$。该向量的绝对值是 $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$。

STEP 之外

质点所描出的路径是圆的*渐伸线*（involute），即从线轴上拉紧展开的一条线，其末端所描出的曲线。齿轮的齿之所以造成那种形状，正是因为渐伸线；它也是惠更斯（Huygens）

研究摆钟时的核心。它的弧长 $\int (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 是平面曲线微分几何（differential geometry，包括渐屈线（evolute）、渐伸线和曲率（curvature））的一个入门例子。至于力学方面，包括能量与角动量在甚么情况下守恒、甚么情况下不守恒，可阅读 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大学力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。