详细解答

STEP II 1988，第 10 题

纯数学 • 抛物面的向量几何

STEP II 1988，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q10

关键思路

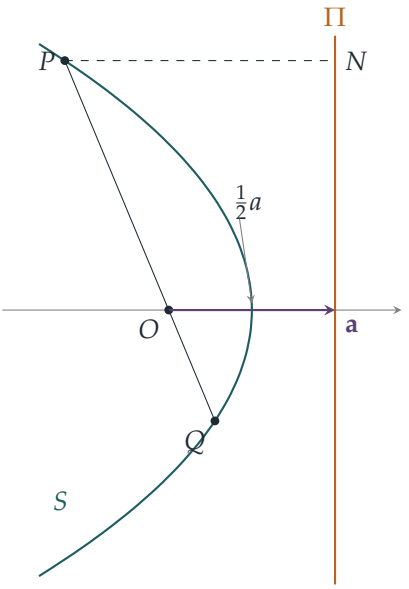
方程中的两个部分各有清晰的几何意义：r 是与 O 的距离，而 $(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$ 是与平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ 的有向距离（signed distance）。因此 S 是一个旋转抛物面（paraboloid of revolution），以 O 为焦点（focus），以该平面为准面（directrix）。至于其余部分，可沿着通过 O 的直线来处理：把直线 OP 上的点写成 $\lambda\mathbf{p}$，把通过 O 且同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 的直线上的点写成 $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，然后代入 S 的方程。λ 的正负号十分重要，因为 $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$。

解答

轨迹

设 Π 为平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$。它的单位法向量（unit normal）是 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$，与 O 的距离为 a，并位于 $\mathbf{a}$ 所指的一侧。由点 $\mathbf{r}$ 到 Π 的垂直距离是

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$



上图显示 S 被一个包含 $\mathbf{a}$ 的平面所截出的截面。点 P 与 O 的距离，等于它与其在 Π 上的垂足 N 的距离。曲面与轴相交于 $\frac{1}{2}\mathbf{a}$，即 O 与 Π 的正中间。

S 上的点是等距的。若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=a^2$，则 $a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar\geq 0$。因此

$$d(\mathbf{r})=\frac{a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a}=\frac{ar}{a}=r=|OR|.$$

等距的点都在 S 上。假设 $r=d(\mathbf{r})$，即 $ar=|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$。若 $a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\geq 0$，这正是 S 的方程。否则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}>a^2$，而该条件表示 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar+a^2>ar$。这与 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\leq ar$（柯西–施瓦茨不等式，Cauchy–Schwarz）矛盾。所以在 Π 另一侧的点都不会等距，而 S 恰好就是与 O 和 Π 等距的所有点所组成的集合。这是一个旋转抛物面，其旋转轴是通过 O 且方向为 $\mathbf{a}$ 的直线。

以下两个推论稍后会用到。对于 S 上的点 P，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}=a^2-ap. \qquad (*)$$

此外 $a^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap\leq 2ap$，所以 $p\geq\frac{1}{2}a$，从而 $2p-a\geq 0$。等号只在 $\mathbf{p}$ 是 $\mathbf{a}$ 的正数倍时成立，即 P 是顶点（vertex）$\frac{1}{2}\mathbf{a}$ 的时候。

第二个交点 Q

直线 OP 上的点是 $\lambda\mathbf{p}$，其中 $|\lambda\mathbf{p}|=|\lambda|p$。代入 S 的方程得

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+a|\lambda|p=a^2.$$

想一想 为甚么 Q 不可能与 P 位于 O 的同一侧?

若 $\lambda > 0$，左方是 $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$，所以 $\lambda = 1$，这就是 P 本身。（从几何上看，由焦点出发的射线与抛物面最多相交一次。）因此 Q 对应 $\lambda < 0$，这时 $|\lambda| = -\lambda$。利用 $(*)$，

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

只要 $2p > a$，即 P 不是顶点，这个值便如所要求般是负数。（在顶点处，直线 OP 就是轴，它与 S 只相交一次。）因此

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{及} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

点 T 和 T'

通过 O 且同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 的直线是 $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$。（我们需要 $\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$，所以 P 不在轴上。）由于 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$，$S$ 的方程简化为 $at = a^2$，即 $|\mathbf{t}| = a$。所以 T 和 T' 位于 S 与通过 O 且平行于 Π 的平面相交所得的圆上，并且

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

想一想 在不知道 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{p}$ 之间夹角的情况下，怎样求出 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$?

利用恒等式（identity）$|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$，它其实就是 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 的另一种写法。然后代入 $(*)$:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

因此

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

而 T 和 T' 的位置向量（position vector）是 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，正如所求。

三角形 PQT 的面积

P、O、Q 三点共线（collinear），而 O 在 P 与 Q 之间。向量 $\mathbf{t}$ 平行于 $\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，所以它垂直于 $\mathbf{p}$，从而垂直于直线 PQ。因此 OT 是三角形 PQT 中由 T 引出的高，其长度为 a。底边是

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

因此

$$\text{面积} = \tfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|OT| = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2p^2}{2p-a}\cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

正如所求。把 T 换成 T'，结果同样成立。

验算

- 取 $\mathbf{a} = (2,0,0)$ 和 $P = (-1.25,3,0)$，即图中的那一点。这时 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap = -2.5 + 2(3.25) = 4 = a^2$，所以 P 在 S 上。公式给出 $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556,-1.333,0)$，而 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + aq = 1.111 + 2.889 = 4$，所以 Q 也在 S 上。
- 取 P 为正焦弦（latus rectum）的一个端点，于是 $\mathbf{p}\perp\mathbf{a}$ 且 $p = a$。这时 $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$，由对称性可知这是正确的。面积是 $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$，而公式给出 $a\cdot a^2/a = a^2$。
- 两个焦距满足 $\dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$，这正是抛物线经典的焦弦（focal chord）性质。
- 在数值上，我们随机选取了 20 000 组 $\mathbf{a}$ 和 P，检验了 Q、T、T' 和面积。最大误差约为 10^{-11}。

常见错误

- 对所有 λ 都写成 $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$。这样唯一的解就是 $\lambda = 1$，便无法找到 Q。
- 在第一部分忘记证明逆命题(converse)。位于 Π 另一侧的点满足 $|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} - a^2$，我们必须排除这些点。
- 用 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PT}$ 的向量积（cross product）来计算面积。这样做是可行的，但比起留意到 $OT\perp PQ$ 要冗长得多。

STEP 之外

这就是圆锥曲线（conic）的焦点–准线定义，只是放在三维空间中，并且不依赖坐标。设 e 为离心率（eccentricity），则曲面 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = e\,a^2$（与 O 的距离等于与 Π 的距离的 e 倍）给出其他以 O 为一个焦点的旋转二次曲面（quadric of revolution）。关系式 $1/OP + 1/OQ = 2/a$ 是极方程（polar equation）$\ell/r = 1 + e\cos\theta$ 的向量形式，而这个方程在轨道力学（orbital mechanics）中占有核心地位。若想进一步学习向量代数，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是很好的下一步；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则收录了更多这类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。