详细解答

STEP II 1988，第 1 题

纯数学 · 部分分式与级数

STEP II 1988，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s2-q1

关键思路

把 f 分解成部分分式（partial fractions），整个问题便归结为把两个简单的分式 $\frac{1}{x-1}$ 和 $\frac{1}{x-2}$ 展开成等比级数（geometric series）。唯一真正要决定的，是每个分式应该朝哪个方向展开。等比级数 $\sum r^n$ 只在 $|r|<1$ 时收敛（converge），所以对每个分式，我们都把分母两项之中绝对值较大的一项提出来。当 $|x|$ 先后越过 1 和 2 时，这个选择便会改变，这就是为甚么会有三个不同的展开式。

解答

部分分式

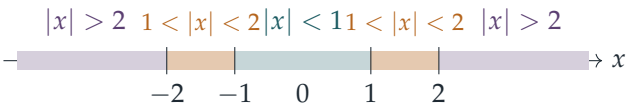
设 $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$。由遮盖法（cover-up rule）得 $A = \frac{1}{1-2} = -1$ 及 $B = \frac{1}{2-1} = 1$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

我们需要的两件基本工具都来自等比级数

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r|<1),$$

其中 r 取 x、$\frac{x}{2}$、$\frac{1}{x}$ 或 $\frac{2}{x}$ 其中之一，视乎在所讨论的范围内哪一个的模（modulus）小于 1。



范围 $|x| < 1$

这里 $|x| < 1$，同时 $|\frac{x}{2}| < \frac{1}{2} < 1$，所以两个分式都可以展开成 x 的幂：

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

两式相加，得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (|x| < 1),$$

正是所求。

范围 $1 < |x| < 2$

第二个分式维持不变：我们仍然有 $|\frac{x}{2}| < 1$，所以 $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{x}{2})^n$，与之前完全一样。

> **想一想** 为甚么第一个分式不能继续使用 $\sum x^n$？

因为现在 $|x| > 1$，各项 x^n 并不趋向零，所以 $\sum x^n$ 发散（diverge）。我们改为从分母提出较大的一项 x，余下的公比是 $\frac{1}{x}$，而 $|\frac{1}{x}| < 1$：

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n},$$

其中最后一步只是把 $n+1$ 重新记作 n。把两部分相加，得

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (1 < |x| < 2),$$

正是所求。

范围 $|x| > 2$

第一个分式沿用上一个范围的展开式，因为 $|\frac{1}{x}| < \frac{1}{2} < 1$。但现在 $|\frac{x}{2}| > 1$，所以第二个分式也要用同样的方法倒转过来展开：提出 x，余下公比 $\frac{2}{x}$，而 $|\frac{2}{x}| < 1$：

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n}.$$

因此，当 $|x| > 2$ 时，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}.$$

$n=1$ 的系数是 $2^0-1=0$，所以这个级数其实由 x^{-2} 开始：

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{7}{x^4}+\frac{15}{x^5}+\cdots \qquad (|x|>2).$$

（两个级数各自收敛，所以逐项合并是合理的。）无论写成两个级数的形式，还是合并后的形式，都是正确答案。

验算

- 主导项。当 $|x|$ 很大时，$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}\approx\frac{1}{x^2}$，与最后一个展开式的首项吻合。$x^{-1}$ 的系数等于零并非巧合：两个部分分式的 $\frac{1}{x}$ 项大小相等、符号相反。
- 代入一个值。当 $x=3$ 时，$\mathrm{f}(3)=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$，而 $\sum_{n\geq2}(2^{n-1}-1)3^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq2}(\frac{2}{3})^n-\sum_{n\geq2}(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$。同样地，$\mathrm{f}(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}$ 和 $\mathrm{f}(\frac{3}{2})=-4$ 亦与头两个展开式吻合。
- 数值上，在各自范围内随机选取数百个点（正负皆有），三个级数（各取 4000 项求和）与 f 的值都相符，误差约为 10^{-14}。

常见错误

- 在 $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$ 中弄错正负号：提出来的因子是 -2，不是 2。
- 乘以 $\frac{1}{x}$ 之后，求和指标差了一：$\frac{1}{x}\sum_{n\geq0}x^{-n}$ 由 x^{-1} 开始，所以重新标记后的和由 $n=1$ 开始。
- 没有检查公比的模是否小于 1，就在每个范围都使用同一个展开式。

STEP 之外

这三个展开式，是复分析（complex analysis）中*洛朗级数*（Laurent series）在实变量上的投影。对于复数 z，函数 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $|z|<1$、$1<|z|<2$ 和 $|z|>2$ 这三个区域内各有不同的洛朗展开式：这三个区域是一个圆盘和两个圆环（annulus），以通过极点（pole）的圆为边界，而 $|x|=1$ 和 $|x|=2$ 在复平面上正好变成这些圆。这类展开式中 z^{-1} 的系数称为留数（residue），原来它们决定了围道积分（contour integral）的值。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何方式讲解了幂级数（power series）和洛朗级数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。