详细解答

STEP I 1988，第 9 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 1988，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s1-q9

关键思路

只要选对着手的部分，两个积分都可以用标准技巧解决。在 (i) 中，$\ln x$ 与 x 的幂相乘，适合使用分部积分法（integration by parts）：对对数求导，对数便会消失。在 (ii) 中，棘手的是平方根，所以我们把它设为新变量。$\cos x\,\mathrm{d}x$ 正好是代换（substitution）所需要的，而余下的是一个有理函数（rational function），可以用部分分式（partial fractions）处理。

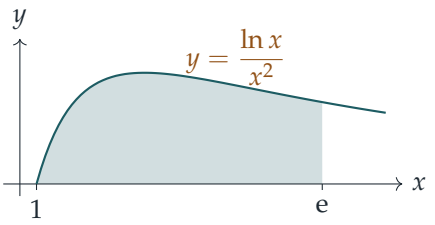
解答

第 (i) 部分

取 $u = \ln x$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$ 作分部积分，于是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ 及 $v = -\dfrac{1}{x}$：

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

这里用到 $\ln \mathrm{e} = 1$ 及 $\ln 1 = 0$。答案是正数，这是必然的：被积函数（integrand）在 $(1, \mathrm{e}]$ 上为正。



阴影部分的面积为 $1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.264$。

第 (ii) 部分

被积函数在 $\sin x \neq 0$ 且 $1 + \sin x > 0$ 时有定义。设

$$u = \sqrt{1 + \sin x}, \qquad \text{于是} u^2 = 1 + \sin x, \quad 2u\,\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \sin x = u^2 - 1.$$

这里 $u > 0$，而且因为 $\sin x \neq 0$，所以 $u \neq 1$。于是

$$\int \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{1 + \sin x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{(u^2 - 1)\,u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u.$$

? **想一想** $\cos x$ 到哪里去了？我们需要把它写成 u 的式子吗？

不需要。整个 $\cos x\,\mathrm{d}x$ 都由 $2u\,\mathrm{d}u$ 取代，这正是这个代换如此干净利落的原因。假如分子是别的东西，我们便要用到 $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$，还得应付随之而来的种种正负号问题。

由部分分式得 $\dfrac{2}{u^2 - 1} = \dfrac{1}{u - 1} - \dfrac{1}{u + 1}$，所以

$$\int \frac{2}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = \ln|u - 1| - \ln|u + 1| + C = \ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C.$$

换回 x，

$$\int \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{1 + \sin x}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sqrt{1 + \sin x} + 1}\right| + C.$$

绝对值（modulus）符号不可省略：当 $-1 < \sin x < 0$ 时，我们有 $0 < u < 1$，而 $\dfrac{u - 1}{u + 1}$ 是负数。（严格来说，由于定义域被 $\sin x$ 的零点分割成多个区间，在被积函数有定义的每个区间上，常数可以各不相同。）

把分数的分子和分母同乘以 $u - 1$，可得一个等价的形式。由于 $(u + 1)(u - 1) = u^2 - 1 = \sin x$，答案亦可写成

$$2\ln|\sqrt{1 + \sin x} - 1| - \ln|\sin x| + C.$$

验算

- 用辛普森法则(Simpson's rule)得 $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$,与 $1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$ 吻合。
- 对于 (ii)，把答案求导：由链式法则（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$，这正是被积函数。数值上，用辛普森法则算得被积函数的 $\int_{0.3}^{1.2}$ 为 0.926006，与原函数（antiderivative）在两端的差一致。在 $\sin x < 0$ 的区间上，结果同样吻合，例如在 $[-1.2, -0.2]$ 上，积分为 -2.361027。

常见错误

- 在 (i) 中，反过来选取 $u = 1/x^2$ 及 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$。这样做原则上可行，但繁复得多；应该对对数求导。
- 在 (ii) 中，漏掉绝对值符号，以致答案在 $\sin x < 0$ 时没有定义。
- 漏掉 $2u\,\mathrm{d}u$ 中的因子 2，令答案减半。

STEP 之外

第 (ii) 部分是一个一般原理的例子：若被积函数是 x 与 $\sqrt{ax+b}$ 的有理函数，经代换 $u = \sqrt{ax+b}$ 后便会变成 u 的有理函数，而有理函数总可以用部分分式来积分。这里 $\sin x$ 扮演了 x 的角色。在大学一年级的分析（analysis）课程中，你会看到故事的另一面：那些为代换法和分部积分法提供依据的定理，以及积分常数（constant of integration）为何可以在定义域的各个分离区间上有所不同。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对这两方面都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。