详细解答

STEP I 1988，第 8 题

纯数学 · 三维几何

STEP I 1988，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

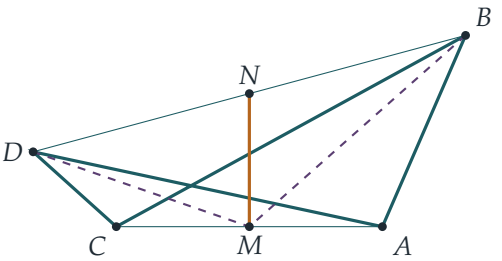
step.maths.org/questions/88-s1-q8

关键思路

每条对角线都把四边形分成两个三角形，而对边相等令这两个三角形全等（congruent）（SSS）。全等三角形的中线（median）相等，所以一条对角线的中点与另一条对角线的两个端点等距。若某点与一条线段的两个端点等距，把它与该线段的中点连起来，所得的直线便垂直于该线段：这其实就是等腰三角形（isosceles triangle）的性质。

解答

设 M 为 AC 的中点，N 为 BD 的中点。



上图是一个空间四边形（skew quadrilateral）的投影；虚线 MB 和 MD 是下文用到的中线，琥珀色的线段是 MN。

首先，$M \neq N$

只有当 M 和 N 是不同的点时，直线 MN 才有意义。假如 $M = N$，对角线 AC 和 BD 便会在一个公共点互相平分。过同一点的两条直线位于同一平面上，所以 A、B、C、D

全都在该平面上，而 $ABCD$ 就会是一个（平面的）平行四边形（parallelogram）。由于 $ABCD$ 是空间四边形，故 $M \neq N$。“空间”这个条件正正用在这里：平行四边形的对边相等，但两个中点却重合。

MN **垂直于** BD

考虑三角形 ABC 和 CDA，它们有公共的对角线 AC。我们有

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

所以这两个三角形全等（SSS），其中 $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$C \leftrightarrow A$。在这个对应之下，三角形 ABC 中由 B 到 AC 中点的中线，对应于三角形 CDA 中由 D 到 CA 中点的中线。两条中线的另一端都是同一点 M，所以

$$MB = MD.$$

想一想 为甚么全等三角形的中线必定相等?

中线完全由边长决定。例如，根据余弦定理（cosine rule）（或阿波罗尼奥斯定理（Apollonius's theorem）），三角形 ABC 中由 B 引出的中线 m 满足 $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$。边长相同，中线也就相同，所以 $MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$。

现在 M 与 B 和 D 等距，而 N 是 BD 的中点。三角形 MNB 和 MND 有 $MB = MD$、$NB = ND$，以及公共边 MN，所以它们全等（SSS），而 $\angle MNB$ 与 $\angle MND$ 两角相等。又因为 B、N、D 在同一直线上，这两个角互补（supplementary）。所以两者都是直角：$MN \perp BD$。（这两个三角形是真正的三角形，并非退化（degenerate）：假如 M 在直线 BD 上而又有 $MB = MD$，M 便会是中点 N，而这个情况我们已经排除了。）

MN **垂直于** AC

把两条对角线的角色对调，同样的论证依然成立。三角形 ABD 和 CDB 有公共的对角线 BD，而且

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

所以它们全等，其中 $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$D \leftrightarrow B$。由 A 和由 C 引出的中线，另一端都是 BD 的中点 N，所以 $NA = NC$。由于 M 是 AC 的中点，而且 $N \neq M$，由上文的等腰三角形论证可得 $MN \perp AC$。

因此，连接两条对角线中点的直线垂直于每一条对角线，这正是所要证明的。

或者用向量

取 M 为原点，于是以位置向量（position vector）表示时有 $C = -A$，而 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{d})$。把题目给出的两个等式平方，

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

两式相减得 $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$，即 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$。由于 $\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$，这就是说 $\overrightarrow{MN} \perp AC$。改为把原点放在 N，便可用同样的方法得到 $MN \perp BD$。

验算

试取 $A = (1,0,0)$、$B = (1,2,1)$、$C = (-1,0,0)$、$D = (-1,-2,1)$。这时 $AB = CD = \sqrt{5}$，$BC = AD = 3$，而且四点不共面（纯量三重积（scalar triple product）$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$ 等于 8）。这里 $M = (0,0,0)$，$N = (0,0,1)$，所以 MN 沿着 z 轴，而 AC 沿着 x 轴，$\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$ 则没有 z 分量：两者都垂直于 MN。我们还测试了 20 000 个对边相等的随机空间四边形；MN 与任何一条对角线之间夹角的余弦值，从未超过 4×10^{-12}。

常见错误

- 没有解释为甚么 $M \neq N$。缺少了“空间四边形”这个条件，结论便不成立，因为平行四边形根本没有直线 MN。
- 声称“根据对称性”有 $MB = MD$，却没有指明是哪两个全等三角形。
- 只证明了与其中一条对角线垂直。第二条需要用另一对全等三角形。

STEP 之外

在上面的例子中，绕 z 轴（即直线 MN）的半周旋转（half-turn）把 A 与 C 互换，也把 B 与 D 互换。这在一般情况下也成立：每一个对边相等的空间四边形，绕 MN 旋转 180° 后都会与自身重合。（这个旋转固定 M，并把每一个垂直于 MN 的方向反转，所以它把 A 送到 C；同样地，它把 B 送到 D。）反过来说，有了这个半周旋转，对边相等便一目了然。把几何事实看成某种对称（symmetry）——即空间的一个等距变换（isometry）——的结果，是大学一年级几何和群论（group theory）的核心思想；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）阐述了群论方面的内容，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的几何题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。