详细解答

STEP I 1988，第 7 题

纯数学 · 二次函数导数的界限

STEP I 1988，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s1-q7

本题在 *Beyond STEP* 第 3.6 节斜率的界中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/markov-bound.html

关键思路

二次函数（quadratic）由它在三个点的取值完全确定，所以 f' 可以由 $f(1)$、$f(-1)$ 和 $f(0)$ 重新构造出来。一旦把 f' 写成这个形式，假设 $|f| \leq 1$ 便控制了三个系数中的每一个，余下的工作交给三角不等式（triangle inequality）就行了。至于最后一部分，我们考察 f 取哪些值时，证明中的每一个不等式都变成等式。

解答

$f'(x)$ 的恒等式

我们有 $f(1) = a + b + c$、$f(-1) = a - b + c$ 和 $f(0) = c$。把右边按 x 的幂次整理：

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \left[(a+b+c)+(a-b+c)-2c\right]x + \tfrac{1}{2}\left[(a+b+c)-(a-b+c)\right] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

由于 $f'(x) = 2ax + b$，这就是所求的恒等式（identity）。

上界 $|f'(x)| \le 4$

假设只要 $|x| \le 1$，就有 $|f(x)| \le 1$。特别地，$|f(1)|$、$|f(-1)|$ 和 $|f(0)|$ 全都不超过 1。任取满足 $|x| \le 1$ 的 x。由恒等式和三角不等式，

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |f(1)|\,\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\,\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\le \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

> **想一想** 当 $|x| \le 1$ 时，$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$ 最大可以是多少?

这是 x 到 $\frac{1}{2}$ 和到 $-\frac{1}{2}$ 的距离之和。若 $|x| \le \frac{1}{2}$，则 x 位于这两点之间，距离之和恰好是 1。若 $|x| > \frac{1}{2}$，两点都在 x 的同一侧，距离之和是 $2|x|$。无论哪种情况，当 $|x| \le 1$ 时它都不超过 2。另外 $2|x| \le 2$，所以

$$|f'(x)| \le 2 + 2 = 4 \qquad \text{对于} |x| \le 1,$$

这正是要证明的结果。

（另一个看法：f' 是线性的，所以在 $[-1,1]$ 上它的绝对值（modulus）在端点处最大，而在 $x = \pm 1$ 处的上界是 $|f'(\pm 1)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$。）

等式成立的一个例子

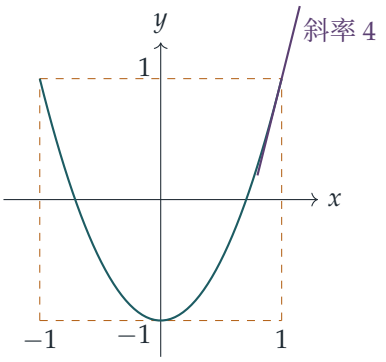
要在 $x = 1$ 处取得等式，上面的每一步在该处都必须恰好取等。在 $x = 1$ 处，系数 $x + \frac{1}{2}$、$x - \frac{1}{2}$ 和 $-2x$ 分别是 $\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}$ 和 -2。因此，要得到 $f'(1) = +4$，我们希望

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

由此得 $c = -1$、$a + b + c = 1$ 和 $a - b + c = 1$，所以 $b = 0$ 而 $a = 2$：

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

现在检查条件。对于 $|x| \le 1$，我们有 $0 \le x^2 \le 1$，所以 $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$，即 $|f(x)| \le 1$。而 $f'(x) = 4x$，所以 $f'(1) = 4$，且 $x = 1$ 在区间之内。这就是我们需要的例子。



曲线 $y = 2x^2 - 1$（蓝绿色）始终留在正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ 之内，由顶边荡到底边再荡回顶边，因此它在两端达到了可能的最大陡峭程度。

（$\pm(2x^2 - 1)$ 中任何一个都给出 $|\mathrm{f}'(\pm 1)| = 4$。选取 $\mathrm{f}(x) = 2x^2 - 1$ 会得到 $\mathrm{f}'(1) = +4$，而 $-(2x^2 - 1)$ 在 $x = -1$ 处也是如此。）

验算

- 试用 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x + 1$：$\mathrm{f}(1) = 3$、$\mathrm{f}(-1) = 1$、$\mathrm{f}(0) = 1$。在 $x = 2$ 处，恒等式给出 $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = \mathrm{f}'(2)$。
- 对 20,000 个二次函数作随机搜索，每个都经缩放使得 $\max_{|x|\le 1} |\mathrm{f}(x)| = 1$，结果从未发现 $\max_{|x|\le 1} |\mathrm{f}'(x)| = 2|a| + |b|$ 超过 4（最大的约为 3.91），而 $2x^2 - 1$ 则恰好达到 4。

常见错误

- 把 $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ 和 $\left|x - \frac{1}{2}\right|$ 分开估计，各以 $\frac{3}{2}$ 为上界。这样只能得到 $|\mathrm{f}'(x)| \le 5$。这两个距离必须合起来一并估计。
- 提出例子后，只在 0 和 ± 1 处检查，而没有在整个区间上验证 $|\mathrm{f}(x)| \le 1$。

STEP 之外

这是马尔可夫不等式（Markov's inequality）在二次情况下的特例：若 n 次多项式（polynomial）p 在 $[-1, 1]$ 上满足 $|p| \le 1$，则在该区间上 $|p'| \le n^2$。等式由切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 取得，而 $2x^2 - 1 = T_2(x)$。利用多项式在选定点上的取值来把它写出，就是拉格朗日插值法（Lagrange interpolation），它是数值分析（numerical analysis）和逼近理论（approximation theory）的基本工具。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。