详细解答

STEP I 1988，第 6 题

纯数学 · 复数与几何

> **STEP I 1988，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q6

关键思路

在阿根图（Argand diagram）上，向量 $\overrightarrow{P_jP_k}$ 就是复数（complex number）$z_k - z_j$，所以向量相等变成差相等，而垂直（perpendicular）则变成“一个差除以另一个差所得的商是纯虚数（purely imaginary）”。把题目给定的数值代入后，条件 (i) 会以 z 表示出 z_4 和 w，而条件 (ii) 则决定了 z 的虚部（imaginary part）。这时会发现六边形关于其中心对称，凸性（convexity）和最后的角度因而都容易处理。

解答

把题目的陈述翻译成代数

由于 $\overrightarrow{P_jP_k}$ 由 $z_k - z_j$ 表示，陈述 (i) 即是说

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad 及 \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

至于 (ii)，两个非零向量 u 和 v 互相垂直，当且仅当它们的辐角（argument）相差 $\pm\frac{\pi}{2}$，亦即 u/v 是纯虚数。各点互不相同，所以 $z_4 - z_2 \neq 0$ 及 $z_6 - z_3 \neq 0$，而陈述 (ii) 即是说

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ 是纯虚数,} \qquad 等价于 \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

(i) 的推论

把 (i) 的两条等式相加，z_2 和 z_5 两项互相抵消：

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad 所以 \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

这正是 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$，即所要证明的结果。

六边形

现在设 $z_1 = 0$、$z_2 = 1$、$z_3 = z$、$z_5 = \mathrm{i}$ 及 $z_6 = w$。由 (i) 的第一条等式得

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

而由第二条等式得 $z - 1 = \mathrm{i} - w$，所以

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

留意 $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$：相对的顶点关于点 $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$ 对称，所以这个六边形有对称中心（centre of symmetry）。

至于 (ii)，$z_4 - z_2 = \mathrm{i}$，而 $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$。商 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$ 是纯虚数，当且仅当 $1 + \mathrm{i} - 2z$ 是实数，亦即 $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$。所以

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{于是} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

设 $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，其中 a 为实数。那么 $w = (1 - a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$ 恒成立。六个顶点是

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1, 1), \quad (0, 1), \quad (1 - a, \tfrac{1}{2}) :$$

即单位正方形在两条垂直边的半高处各加上一个“尖角”。

想一想 怎样才可以不靠图形来检验凸性?

顺着次序沿六边形走一圈。六边形是凸的，当且仅当我们在每个顶点都向同一方向转弯。在某个顶点的转向，可用进入该顶点的边 u 与离开该顶点的边 v 的叉积（cross product）$\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$ 的正负号来量度。各边是

$$P_1P_2 = (1, 0), \quad P_2P_3 = (a - 1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1 - a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1, 0), \quad P_5P_6 = (1 - a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a - 1, -\tfrac{1}{2}),$$

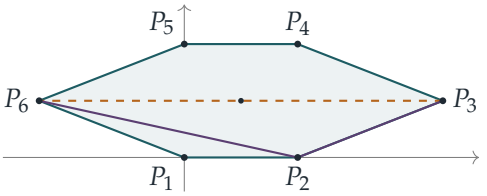
而在 $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$ 的叉积依次为

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a - 1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a - 1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

无论 a 取甚么值，其中四个都是正数，所以六边形是凸的，当且仅当 $a - 1 > 0$。（若 $a = 1$，则 P_3 位于线段 P_2P_4 上，得不到真正的六边形。）从几何上看，P_3 必须位于正方形的边 $x = 1$ 的右方，而根据对称性，P_6 必须位于 $x = 0$ 的左方。所以条件是

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) > 1 \quad \text{及} \quad \mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z) \ \ (\text{所以}\mathrm{Re}(w) < 0)}$$

（连同 $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) = \frac{1}{2}$，这已由 (ii) 所决定）。



距离 P_3P_6

在 P_2 处，角的两臂是

$$z_3 - z_2 = (a-1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6 - z_2 = -a + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

对于角 $\theta = \angle P_3P_2P_6$（介乎 0 与 π 之间），两臂的点积（dot product）给出 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$，而叉积的大小给出 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$：

$$\text{点积} = -a(a-1) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(1 + 4a - 4a^2), \qquad \text{叉积} = (a-1)\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot(-a) = \tfrac{1}{2}(2a-1).$$

当 $a > 1$ 时叉积为正数，所以它正好就是含 $\sin\theta$ 的那一项，于是

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)} = \frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

令它等于 $-\frac{2}{3}$：

$$3(2a-1) = -(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2 - 10a + 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2 - 5a + 1 = 0,$$

所以 $a = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{17})$。取负号得 $a \approx 0.22$，不符合凸性条件 $a > 1$；取正号得 $a \approx 2.28 > 1$。（这时分母 $1 + 4a - 4a^2$ 是负数，所以 θ 是钝角，正切为负数时正应如此。）

最后，P_3 和 P_6 的虚部相同，所以

$$P_3P_6 = |z - w| = |2a - 1| = 2a - 1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \approx 3.56.$$

如果不要求六边形是凸的，用同样的方法（这时分子要改为 $|2a-1|$）会多得一个解 $a = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})$。这只是镜像 $a \mapsto 1-a$，它把 z 和 w 互换，所得的距离同样是 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$。

验算

- 对称性：$z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6$，所以结果 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ 不过是中心对称六边形的第三对对边。
- 取 $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$，直接计算 $\arg\big((z_6 - z_2)/(z_3 - z_2)\big)$，所得的角的正切是 -0.66667，而 $|z - w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$。
- 对由 -5 至 5 的 a 以数值方法检验凸性，确认六边形是凸的当且仅当 $a > 1$。

常见错误

- 弄错向量的方向：$\overrightarrow{P_5P_4}$ 是 $z_4 - z_5$，而不是 $z_5 - z_4$。
- 把垂直写成“斜率之积为 -1”，结果遗漏了铅垂的情况。这里 $\overrightarrow{P_2P_4}$ 是铅垂的，而用商来检验就能干净利落地处理这种情况。
- 保留了根 $a = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{17})$，但它并不给出凸六边形（事实上这时 $\tan\theta > 0$）。

STEP 之外

把点看成复数，几何就变成代数：平移是加法，旋转和缩放是乘法。“u/v 是纯虚数”这个检验，正是角度化为辐角的一个例子。以叉积的正负号检验凸性，是计算几何（computational geometry）中标准凸包（convex hull）算法的基础。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种以几何看待复数的观点发挥得淋漓尽致。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。