详细解答

STEP I 1988，第 5 题

纯数学 · 级数与生成函数

> **STEP I 1988，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

关键思路

把每个因式展开成等比级数（geometric series）（即指数为 -1 的二项式定理（binomial theorem）），然后相乘：c_m 就是一个有限等比级数之和，有简洁的闭合形式（closed form）。只要把 c_m^2 写成 $(a^2)^m$、$(ab)^m$ 和 $(b^2)^m$ 这三个纯幂的组合，最后的级数便会分拆成三个等比级数。余下的工作，就是小心处理分式的代数运算，并留意每个级数在哪里收敛（converge）。

解答

求 c_m

根据指数为 -1 的二项式定理，

$$(1-ax)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a^kx^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}b^jx^j \quad (|bx|<1).$$

由于 $0<a<b$，条件 $b|x|<1$ 给出 $a|x|<b|x|<1$，所以两个展开式都成立。两个级数都绝对收敛（converge absolutely），因此我们可以把它们相乘，再按 x 的幂次合并各项。x^m 的系数来自满足 $k+j=m$ 的各对指数：

$$c_m=\sum_{k=0}^{m}a^kb^{m-k}=b^m+ab^{m-1}+\cdots+a^{m-1}b+a^m.$$

这是一个等比级数，首项为 b^m，公比为 a/b，共有 $m+1$ 项。由于 $a\neq b$，它的和是

$$c_m=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{b-a}.$$

（等价地，$(b-a)c_m=b^{m+1}-a^{m+1}$，因为把乘积展开后，各项会逐一相消（telescope）。）

c_m^2 的公式

两边平方，并利用 $(b-a)^2=(a-b)^2$，得

$$c_m^2=\frac{\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2}=\frac{a^{2m+2}-2(ab)^{m+1}+b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

这正是所要求的结果。

级数 $\sum c_m^2 x^m$

上一条公式的要点，在于每一项都是一个常数乘以一个 m 次幂：

$$c_m^2x^m=\frac{1}{(a-b)^2}\left(a^2\left(a^2x\right)^m-2ab\left(abx\right)^m+b^2\left(b^2x\right)^m\right).$$

所以 $\sum c_m^2x^m$ 是三个等比级数的组合，公比分别为 a^2x、abx 和 b^2x。

> **想一想** 对哪些 x，这三个等比级数全部收敛?

我们需要 $|a^2x|<1$、$|abx|<1$ 和 $|b^2x|<1$。由于 $0<a^2<ab<b^2$，最后一个条件最强，并且蕴涵另外两个。所以三个级数全部收敛，当且仅当 $|x|<1/b^2$。这时把每个等比级数求和，得

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m^2x^m=\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x}-\frac{2ab}{1-abx}+\frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

把所有项通分，公分母为 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$。分子是

$$N=a^2(1-abx)(1-b^2x)-2ab(1-a^2x)(1-b^2x)+b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

我们按 x 的幂次整理：

$$\begin{aligned}
\text{常数项：}\quad & a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\\
\text{系数，对应}x\text{：}\quad & -a^2(ab+b^2)+2ab(a^2+b^2)-b^2(a^2+ab)\\
& \qquad =a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a-b)^2,\\
\text{系数，对应}x^2\text{：}\quad & a^2\cdot ab^3-2ab\cdot a^2b^2+b^2\cdot a^3b=0.
\end{aligned}$$

所以 $N=(a-b)^2(1+abx)$。因式 $(a-b)^2$ 可以约去，余下

$$c_0^2+c_1^2x+c_2^2x^2+\cdots=\frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)}\qquad \text{适用于}-\frac{1}{b^2}<x<\frac{1}{b^2}.$$

这个区间不能再扩大。在 $x=\pm1/b^2$ 处，各项满足

$$|c_m^2x^m|=\frac{\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2\,b^{2m}}=\frac{b^2(1-(a/b)^{m+1})^2}{(b-a)^2}\to\frac{b^2}{(b-a)^2}\neq 0,$$

所以级数在该处发散（diverge）；当 $|x|>1/b^2$ 时级数同样发散，因为这时各项会无限增大。

验算

取 $a=1, b=2$。这时 $c_m = 2^{m+1}-1$，所以 $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$，而直接计算可得 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1+x+x^2+\dots)(1+2x+4x^2+\dots) = 1+3x+7x^2+\cdots$。它们的平方是 $1, 9, 49$。另一方面，$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1+7x+35x^2+\cdots$，再乘以 $1+2x$ 便得到 $1+9x+49x^2+\cdots$，与预期相符。数值上，取 $a=0.7$、$b=1.3$ 和 $x=0.3$，把 $c_m^2 x^m$ 加至很多项，得 $4.163878\ldots$，与闭合形式的值吻合。

常见错误

- 把区间写成 $b|x|<1$，即照抄第一部分的条件。新级数的公比是 a^2x、abx、b^2x，所以条件应为 $b^2|x|<1$。
- 让 c_m 停留在求和的形式。闭合形式 $(b^{m+1}-a^{m+1})/(b-a)$ 正是令题目余下部分得以完成的关键。
- 在 N 中 x 的系数出现正负号错误。老老实实地把每个乘积逐项展开，比尝试取巧更快。

STEP 之外

级数 $\sum c_m x^m$ 是数列 c_m 的*生成函数*（*generating function*），而这道题说明：如果一个数列有有理的生成函数，那么由它各项的平方组成的数列也是如此。这是两个有理幂级数的*阿达马乘积*（*Hadamard product*）的一个特例，而这种乘积必定是有理的。这里求得的区间是*收敛半径*（*radius of convergence*）的一个例子：有理函数的幂级数（power series）一直收敛到最近的极点（pole）为止，在这里就是 $x = 1/b^2$。关于生成函数，Wilf 的 *generatingfunctionology* 有十分精彩的阐述；至于幂级数及其收敛性，Abbott 的 *Understanding Analysis* 有严谨细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。