详细解答

STEP I 1988，第 4 题

纯数学 · 直线交点的计数

> **STEP I 1988，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

关键思路

不要试图一次过想像所有线段。不如改问：两条线段（segment）何时会相交？答案只取决于它们的端点（endpoint）在两条轴上的排列次序，而每一个交叉点因此都对应于在每条轴上各选两点。只要能数出单独一条线段上的交叉点，那些极端的线段以及最后的平均值，只需小心计数便可得出。

解答

把 y 轴上的点按与原点 O 的距离由小至大依次记为 $B_1, \ldots, B_m$，x 轴上的点亦同样记为 $A_1, \ldots, A_n$。以 s_{ij} 表示线段 B_iA_j。

第 (i) 部分

m 个点 B_i 中的每一个都与 n 个点 A_j 中的每一个相连，所以共有

$$mn$$

条线段。

第 (ii) 部分

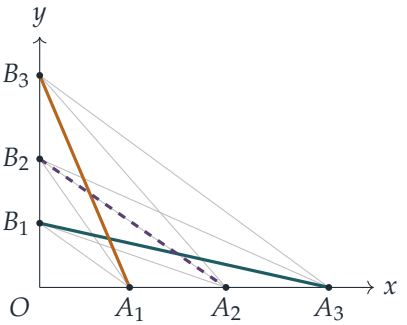
取两条不同的线段 s_{ij} 和 s_{kl}。

- 若 $i = k$ 或 $j = l$，它们有一个公共端点。由同一点出发的两条相异线段只会在该点相遇，而这类相遇点不计算在内。
- 若 $i < k$ 且 $j < l$，则 B_i 和 A_j 都与 O 位于直线 B_kA_l 的同一侧（它们在三角形 OB_kA_l

的两条边 OB_k 和 OA_l 上，而不在 B_k 或 A_l 处）。若一条线段的两个端点都严格位于某直线的同一侧，整条线段便留在该侧，所以 s_{ij} 永不与 s_{kl} 相遇：它“嵌套”在下方。

- 若 $i < k$ 且 $j > l$，则 B_i 与 O 位于直线 B_kA_l 的同一侧，而 A_j 在另一侧。所以 s_{ij} 穿过该直线。同理，A_l 位于直线 B_iA_j 靠 O 的一侧，而 B_k 在另一侧。每条线段都把另一条线段的两个端点分隔开，所以这两条线段恰好交于一点，而该点并非端点。

$i > k$ 的情况相同，只是角色互换。



在图中（$m = n = 3$），蓝绿色的 s_{13} 与琥珀色的 s_{31} 的端点次序相反，所以它们相交。虚线 s_{22} 亦与它们各自相交。

因此，每一对交于内点的线段，都来自选取两点 B_i, B_k（$i < k$）和两点 A_j, A_l（$j < l$），然后取 s_{il} 和 s_{kj}。反过来，每一个这样的选择都恰好给出一对相交的线段。由于没有三条线段通过同一个内点，不同的线段对给出不同的点。因此交点（point of intersection）的数目为

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

平均值

一条线段上的交叉点。根据上述法则，s_{ij} 与 s_{kl} 相交，当且仅当 $k < i$, $l > j$ 或 $k > i$, $l < j$。所以 s_{ij} 上的交点数目为

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

当 $m = n$ 时的极端线段。设 $N = n - 1$，$a = i - 1$，$b = j - 1$，则 $0 \le a, b \le N$，且

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

这可以展开验证。由于 $|N - 2a| \le N$ 及 $|N - 2b| \le N$，乘积 $(N-2a)(N-2b)$ 介乎 $-N^2$ 与 N^2 之间。因此 $0 \le c_{ij} \le N^2$，并且：

- $c_{ij} = N^2$ 仅当 $(N-2a)(N-2b) = -N^2$，即 $\{a,b\} = \{0,N\}$。这就是 s_{1n} 和 s_{n1} 两条线段。
- $c_{ij} = 0$ 仅当 $(N-2a)(N-2b) = N^2$，即 $a = b = 0$ 或 $a = b = N$。这就是 s_{11} 和 s_{nn} 两条线段。

（这里 $N \geq 2$，所以四条线段互不相同。）所以恰好有两条线段上的点数最多，为 $(n-1)^2$，亦恰好有两条线段上的点数最少，为 0。移除它们后，剩下 $n^2 - 4$ 条线段。

想一想 究竟是对甚么取平均?

我们数的是移除那四条线段之后仍然存在的交点，即两条剩余线段之间的交叉点，每点只数一次。然后除以剩余线段的数目。（如果你改为把每条剩余线段上的交叉点加起来，每个点都会被数两次，而且一些已失去的点仍会被计入。这样会得出 $\frac{1}{2}(n-1)^2$，并非题目所给的答案。见“常见错误”。）

失去的点。线段 s_{11} 和 s_{nn} 上没有交点，所以移除它们不会失去任何点。线段 s_{1n} 和 s_{n1} 上各有 $(n-1)^2$ 个点。它们互相相交（$1 < n$ 且 $n > 1$），所以恰好有一点同时位于两者之上。根据容斥原理（inclusion–exclusion），失去的点数为 $2(n-1)^2 - 1$。

剩余的点。由第 (ii) 部分取 $m = n$，剩余的点数为

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

至于因式分解（factorisation），注意 $n = 2$ 时该四次多项式为 $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$，所以 $n - 2$ 是一个因式。把 $(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$ 乘开即可确认。

平均值。除以剩余的 $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$ 条线段，并约去 $n - 2 \neq 0$（因为 $n \geq 3$），得平均值为

$$\frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4(n-2)(n+2)} = \frac{n^3 - 7n + 2}{4(n+2)},$$

正如所求。

验算

当 $n = 3$ 时，公式给出 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$。直接计算：移除 $s_{11}, s_{33}, s_{13}, s_{31}$ 后，剩下 $s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{32}$。其中只有 s_{12} 与 s_{21}，以及 s_{23} 与 s_{32}，端点次序相反，所以 5 条线段上共有 2 个点，得出

$\frac{2}{5}$。我们亦用电脑验算：在两条轴上随机放置点，以精确算术找出每一个交叉点，确认了 mn、$\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ 和 c_{ij}。此外亦确认了平均值公式对 3 至 29 的每一个 n 都成立。

常见错误

- 把每条剩余线段上的交叉点加起来。每个点都位于两条线段上，所以这样会重复计算，而且仍然包括了与被移除线段共有的点。结果是 $\frac{1}{2}(n-1)^2$，而非题目所给的公式。
- 忘记 s_{1n} 和 s_{n1} 互相相交，因而减去 $2(n-1)^2$ 而非 $2(n-1)^2-1$。
- 把交叉点数成 $\binom{mn}{2}$ 对线段：大部分线段对不是共用一个端点，就是互相嵌套，根本不会相交。

STEP 之外

本题的核心是一个双射（bijection）：交叉点与在每条轴上各选两点的方法一一对应。这是组合数学（combinatorics）的基本工具。同一幅图亦出现于完全二部图（complete bipartite graph）$K_{m,n}$ 的“交叉数”（crossing number）之中。Zarankiewicz 的画法（正是这一种，只是每条轴的两侧都有点）用了 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 个交叉点，而这是否总是最少的可能数目，至今仍是未解决的问题（open problem）。想多做以双射计数的题目，可看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于图论（graph theory），可看 Wilson 的 *Introduction to Graph Theory*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。