详细解答

STEP I 1988，第 3 题

纯数学 · 几何极值的界限

STEP I 1988，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s1-q3

关键思路

先问一个问题：正方形内的一点若离 O 很远，它可以在哪里？它必定被挤进对角附近的一小块区域。如果 P 和 Q 都离 O 很远，两点便同在这一小块区域内，因此彼此相距很近。$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 这个数的大小恰好令这个论证成立，而它来自一个对称地放在正方形内的等边三角形（equilateral triangle）。

解答

以厘米为单位，取 O 为原点，正方形为 $0 \le x \le 1$、$0 \le y \le 1$。记

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

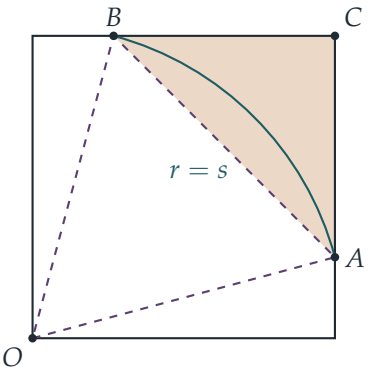
并设 $t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$。定义以下各点：

$$A = (1,t), \qquad B = (t,1), \qquad C = (1,1).$$

于是

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

所以 OAB 是正方形内一个边长为 s 的等边三角形。



蓝绿色的弧是以 O 为圆心、半径为 s 的圆；正方形在这条弧以外的部分，全在涂上阴影的三角形 ABC 之内。

第 1 步：离 O 远的点都在三角形 ABC 内

直线 AB 的方程是 $x+y=1+t$。考虑正方形在这条直线靠 O 一侧的部分，即 $\{x+y\le 1+t\}$。这是一个五边形，顶点为

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

函数 x^2+y^2 是凸函数（convex function），所以它在这个凸五边形上的最大值必在某个顶点取得。它在各顶点的值依次是 0、1、s^2、s^2、1，其中最大的是 s^2。因此，对正方形内的每一点，

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

都成立。反过来说：如果正方形内的一点 (x,y) 与 O 的距离大于 s，则 $x+y>1+t$；又因为 $x\le 1$ 及 $y\le 1$，这一点必在三角形 ABC 内。

> ? **想一想** 为甚么三角形内两点之间的最大距离，必定是它其中一条边的长度?

固定 Q。距离 $|PQ|$ 是 P 的凸函数，所以在三角形上，当 P 是顶点时它取得最大值。现在固定这个顶点，让 Q 变动：根据同样的论证，Q 也可以取为顶点。因此，三角形内两点之间的最大距离就是某两个顶点之间的距离，也就是它最长的边。

第 2 步：导出矛盾

假设 $OP>s$ 而且 $OQ>s$；否则结论已经成立。根据第 1 步，P 和 Q 都在三角形 ABC 内。这个三角形最长的边是 $AB=s$（另外两边的长度是 $\sqrt{3}-1<s$）。所以根据上面方框内的结果，

$$PQ\le s.$$

由此可见，无论在哪一种情况，OP、PQ、QO 之中至少有一个不超过 $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 厘米，这正是要证明的结论。

这个界已是最佳

取 $P = A$ 及 $Q = B$，便恰好有 $OP = PQ = QO = s$，所以任何更小的数都不行。由于 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，我们有 $s = \sec 15^\circ$：极端情况的三角形就是关于对角线对称放置的等边三角形，其中 OA 和 OB 各与正方形的一条边成 15° 角。

验算

- $s \approx 1.0353$，比正方形的边长稍大，又远小于对角线的长度 $\sqrt{2} \approx 1.414$，这是合理的。
- 数值上，在正方形内随机抽取 10^6 对 P, Q，$\min(OP, PQ, QO)$ 从未超过 s（最大的约为 1.0235）。以爬山法（hill-climbing）搜索这个最小值的最大可能值，结果收敛到 $P \approx (1, 0.26795)$、$Q \approx (0.26795, 1)$，其值为 1.035276，与 A、B 和 s 吻合。

常见错误

- 只论证了当 $OP, OQ > s$ 时 $\angle POQ < 60^\circ$。这是对的，但单凭这一点并不能令 PQ 成为最短的边，所以若不再多下工夫，证明仍未完成。
- 只检查对称的情况。这只说明这个界不能再改进；它并没有证明这个界对所有 P 和 Q 都成立。

STEP 之外

这是一道关于点的装填的小型极值问题（extremal problem）：一个区域内的三点，可以同时彼此相距多远？这类问题会引向装填（packing）与覆盖（covering）问题，也引向集合的*直径*（diameter）这个概念：一个集合的直径与它的凸包（convex hull）的直径相同。正是这个事实令第 2 步变得轻而易举。想做更多同类问题，可参看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。