详细解答

STEP I 1988，第 2 题

纯数学 · 驻点

> **STEP I 1988，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

关键思路

把 g 看成一个复合函数（composition）：$\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$，其中 $h(t) = t + 1/t$。由链式法则（chain rule）可知，g' 只会在 $\mathrm{f}' = 0$ 或 $h'(\mathrm{f}) = 0$ 之处为零，而后者即 $\mathrm{f} = \pm 1$。把 $\cos 2x$ 用 $\sin x$ 表示，f 便成为 $\sin x$ 的二次式（quadratic），其大小和形状由此一目了然。

解答

导数

用链式法则对 $\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$ 求导，

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

再用积法则（product rule）求导一次，并利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{f}^{-2}) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$，

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f 的大小

利用 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$，并设 $s = \sin x$，

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

当 s 取遍 $[-1,1]$ 时，此式在 $s=\frac{1}{2}$ 处最大（为 $\frac{11}{2}$），而在区间中离 $\frac{1}{2}$ 最远的端点，即 $s=-1$ 处最小，其值为 1。因此

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{对所有} x,$$

而且只有当 $\sin x=-1$ 时才有 $\mathrm{f}(x)=1$。特别地，f 永不为零，所以 g 处处有定义。

驻点

$\mathrm{g}'(x)=0$ 当且仅当 $\mathrm{f}'(x)=0$ 或 $\mathrm{f}(x)^2=1$；满足此条件的点就是驻点（stationary point）。

f′ 的零点。我们有

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x),$$

它在 $\cos x=0$ 或 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时为零；在 $[0,2\pi]$ 内即

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

$\mathrm{f}=\pm 1$ 的点。由于 $\mathrm{f}\ge 1$，这即是 $\mathrm{f}=1$，亦即 $\sin x=-1$，亦即 $x=\frac{3\pi}{2}$，而这一点已在上面的列表之中。

所以 g 在 $[0,2\pi]$ 内恰好有四个驻点。（两个端点不在其中：$\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$。）

驻点的分类

我们有 $\mathrm{f}''(x) = -4\cos 2x - 2\sin x$。在每一个驻点都有 $\mathrm{f}'=0$，所以 g'' 的第二项消失，得 $\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$。

- $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$：此时 $\sin x=\frac{1}{2}$，$\cos 2x=\frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{f}=\frac{11}{2}$ 且 $\mathrm{f}''=-2-1=-3$。于是 $\mathrm{g}''=-3\big(1-\frac{4}{121}\big)<0$：两点都是**极大点**（maxima），并且

$$\mathrm{g} = \tfrac{11}{2} + \tfrac{2}{11} = \tfrac{125}{22}.$$

- $x=\frac{\pi}{2}$：此时 $\sin x=1$，$\cos 2x=-1$，所以 $\mathrm{f}=5$ 且 $\mathrm{f}''=4-2=2$。于是 $\mathrm{g}''=2\big(1-\frac{1}{25}\big)=\frac{48}{25}>0$：这是**极小点**（minimum），并且 $\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$。
- $x=\frac{3\pi}{2}$：此时 $\mathrm{f}=1$，所以 $1-\mathrm{f}^{-2}=0$，同时 $\mathrm{f}'=0$。因此 $\mathrm{g}''=0$。

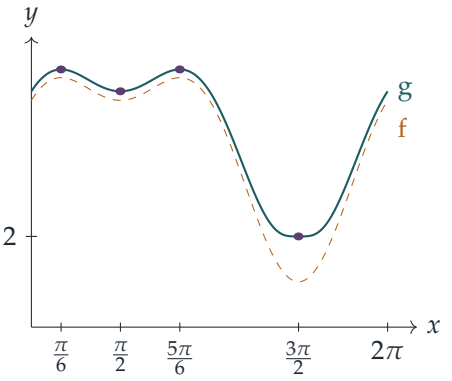
> **想一想** 二阶导数判别法（second-derivative test）在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处失效。还有甚么方法可以判断？

回到 $h(t)=t+1/t$。对于 $t>0$，

$$t+\frac{1}{t}-2 = \frac{(t-1)^2}{t} \ge 0,$$

等号只在 $t = 1$ 时成立。由于 $\mathrm{f} > 0$，由此可得对每一个 x 都有 $\mathrm{g}(x) \geq 2$，而等号恰好在 $\mathrm{f}(x) = 1$ 时成立。在 $x = \frac{3\pi}{2}$ 处有 $\mathrm{g} = 2$，所以这是**极小点**（事实上是 g 的全域最小值（global minimum））。

总结。极大点在 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$（值为 $\frac{125}{22}$）；极小点在 $x = \frac{\pi}{2}$（值为 $\frac{26}{5}$）和 $x = \frac{3\pi}{2}$（值为 2）。



验算

- 由于 h 在 $t > 1$ 时递增，凡是 $\mathrm{f} > 1$ 之处，g 都应该随 f 一同升降；图像证实 f（虚线）和 g 有相同的转向点（turning point）。
- 数值上，$\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$ 而 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$；在 $[0, 2\pi]$ 上对 g 作细密扫描，只在 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ 找到转向点，最小值为 2.000。
- g'' 的公式与在随机选取的点上以有限差分（finite difference）计算的二阶导数吻合。

常见错误

- 忘记因子 $1 - \mathrm{f}^{-2}$：在本题中它没有带来新的驻点，但这只是因为 $\mathrm{f} = 1$ 恰好发生在 $\mathrm{f}' = 0$ 之处。你仍然必须检查这个因子。
- 由 $\mathrm{g}''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ 就断定该点是拐点（point of inflection）。二阶导数为零，单凭这一点并不能说明甚么。

STEP 之外

$x = \frac{3\pi}{2}$ 这个退化点在复合函数中十分典型：如果 f 取极小值之处恰好也是 h 取极小值之处，$h \circ \mathrm{f}$ 在该处就会“更平坦”，二阶导数亦随之为零。大学的数学分析（analysis）以泰勒定理（Taylor's theorem）取代二阶导数判别法，按第一个非零的导数来为这类点分

类，或者（像我们所做的那样）直接用不等式来判断。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严谨地建立中值定理（mean value theorem）和泰勒定理，是了解这些内容的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。