详细解答

STEP I 1988，第 13 题

力学 · 弹性绳与碰撞

STEP I 1988，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s1-q13

关键思路

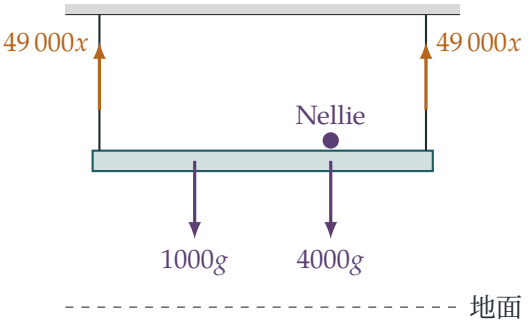
整个过程分为三个阶段，每个阶段各有自己的守恒定律（conservation law）。Nellie 落在木板上是一次突然发生的非弹性碰撞（inelastic collision），所以动量（momentum）守恒，但能量并不守恒。下降至地面的过程只涉及重力和弹性绳，所以能量守恒。Nellie 离开木板之后，能量再次守恒，而我们要问的是：储存的弹性势能是否足以把木板提升至超过绳子回复自然长度（natural length）的位置。

解答

我们把木板看成一个始终保持水平的刚体（rigid body），于是可以把它当作一个质量为 1000 kg、沿铅垂方向运动的质点（particle）。Nellie 是一个质量为 4000 kg 的质点，而绳子是遵守虎克定律（Hooke's law）的轻弹性绳（light elastic string）。两条绳子的伸长量（extension）x 始终相同，所以它们合共施加向上的力

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

因此这对绳子的作用就如一条劲度（stiffness）为 $K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$ 的弹簧，其弹性势能（elastic energy）为 $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J。



起始位置

Nellie 到来之前，木板悬挂着处于平衡（equilibrium）状态，所以伸长量 e_0 满足

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1\ \text{m}.$$

落在木板上

Nellie 落在木板上之后便留在上面，所以这是一次完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision）。撞击历时极短，而绳子的张力（tension）和各重量都是有限的力，所以它们在撞击期间的冲量（impulse）可以忽略不计。因此动量守恒，而紧接撞击之后的共同速率 v 满足

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4\ \text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

想一想 我们可以从 Nellie 到达的一刻起就直接使用能量守恒吗?

不可以。一头大象落在木板上并留在上面时，大量动能（kinetic energy）会转化为热和声音：这里 $\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 5^2 = 50\,000\,\text{J}$ 变成了 $\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2 = 40\,000\,\text{J}$，即损失了 $10\,000\,\text{J}$。能量只是从紧接落下之后的一刻起才守恒。

下降过程

设 h 为木板最初离地面的高度。木板和 Nellie（总质量 $5000\,\text{kg}$）以速率 $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ 出发，在低了距离 h 的地面处静止下来，该处的伸长量为 $0.1 + h$。做功的力只有重力和绳子的拉力，所以

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2}_{\text{动能损失}} + \underbrace{5000 \cdot 9.8\,h}_{\text{重力势能损失}} = \underbrace{49\,000[(0.1+h)^2 - 0.1^2]}_{\text{弹性势能增加}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h + h^2).$$

两边除以 49 000 并整理，得

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{所以} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16 + \tfrac{40}{49}} = \frac{14 + 2\sqrt{299}}{35},$$

由于 $h > 0$，这里取正根。因此

$$h \approx 1.39\ \text{m}.$$

在这个阶段中绳子一直保持拉紧，因为木板下降时伸长量只会增加。

Nellie 离开之后

Nellie 轻轻地走下木板，所以只剩下木板（1000 kg）静止在地面处，伸长量为

$$X = 0.1 + h \approx 1.488\ \text{m}.$$

如果木板上升得足够高，使伸长量降至零，绳子便会松弛（slack），这表示木板要上升高度 X。绳子拉紧期间能量守恒，因此只要储存的弹性势能大于势能的增加，木板便会到达该高度：

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500\ \text{J}, \qquad 1000 \cdot 9.8 \cdot X \approx 14\,600\ \text{J}.$$

前者远大于后者，所以木板到达自然长度位置时仍在向上运动，动能约为 93 900 J（速率约为 $13.7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$）。在这一点之上，绳子要比自然长度更短才行，所以它们是松弛的。**会，绳子会变得松弛。**

> ? **想一想** 我们不可以直接用简谐运动吗?

可以,只要绳子仍然拉紧。木板独自绕着其平衡伸长量 0.1 m 作简谐运动(simple harmonic motion，简称 SHM)，而它从平衡位置之下 $h \approx 1.39$ m 处出发，所以振幅（amplitude）是 1.39 m。振动的最高点会在伸长量为 $0.1 - 1.39 < 0$ 之处，而这对拉紧的绳子来说是不可能的。所以绳子必定在木板到达最高点之前松弛。（事实上，只要 $h > 0.1$，SHM 的论证便已给出答案。）

绳子一旦松弛，木板便只在重力作用下自由运动，再上升 $13.7^2/(2 \times 9.8) \approx 9.6$ m。这小于 10 m，所以木板（仅仅!）不会在回落之前碰到绳子的固定点。

验算

- 把 $h = 1.3881$ 代入能量方程：两边都等于 108 017 J（准确至最接近的焦耳）。
- 由 $x = 0.1$、$\dot{x} = 4$ 出发，以数值方法逐步计算 $\ddot{x} = g - Kx/5000$，得出木板下降 1.3881 m 后停下。

- 逐步计算 Nellie 离开后木板的运动，显示伸长量降至零时木板正以 $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 向上运动，而最高点在地面之上 $11.07\,\mathrm{m}$，与 $X + 9.58$ 吻合。
- 单位：$490\,000\,\mathrm{N} / 10\,\mathrm{m}$ 给出 $\mathrm{N\,m^{-1}}$，所以能量方程中每一项的单位都是焦耳。

常见错误

- 在落下的一刻使用能量守恒，这样得出的共同速率是 $\sqrt{20} \approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，而不是 $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。
- 由自然长度起计算弹性势能，却忘记了初始伸长量 $0.1\,\mathrm{m}$：增加的能量是 $49\,000[(0.1+h)^2 - 0.1^2]$，而不是 $49\,000\,h^2$。
- 只用了一条绳子的劲度，而不是两条。

STEP 之外

这对绳子是一条非线性弹簧（nonlinear spring）：拉长时它会拉，但压缩时却不能推。这类会在不同运动方程之间切换的系统，称为分段线性（piecewise-linear）振子或“碰撞”振子（“impact” oscillator），即使是简单的例子，其行为也可以出乎意料地复杂。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对能量、碰撞和振动有严谨的论述，而这些正是本题的全部基础。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。