详细解答

STEP I 1988，第 12 题

力学 • 变力作用下的运动

> **STEP I 1988，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q12

关键思路

对每一种方法，求出溜冰者朝岸边最远能前进多少；只要 d 大于其中至少一种方法的这个距离，她就安全，反之则不然。转弯是典型的圆周运动（circular motion）：一个大小不变、与速度垂直的力会令她沿固定半径的圆运动，而这个半径正是她仍会向前推进的距离。煞停则是变力（variable force）问题：力取决于速率，但我们要求的是距离，这正提示我们把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

解答

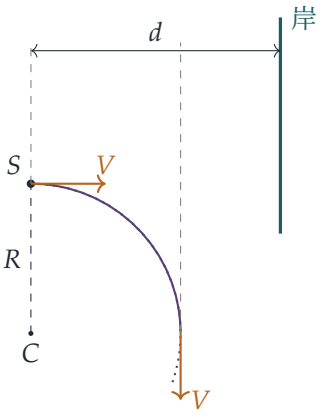
模型

我们把溜冰者视为质量为 M 的质点（particle），置于光滑（smooth）的水平冰面上。她在水平方向所受的唯一的力就是她自己施加的那个力，因此重量与法向反作用力（normal reaction）互相抵消，往后不必再考虑。我们由她的起点朝岸边量度距离 x，所以岸边位于 $x = d$。

方法一：沿圆弧转弯

与速度垂直的力不做功，所以她的速率保持为 V。一个大小恒为 F 的力，若始终与速率恒为 V 的速度成直角，便提供了沿半径为 R 的圆运动所需的向心力（centripetal force），其中

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



她由 S 出发，正对着岸边前进，所以圆心 C 位于通过 S 且与岸边平行的直线上，与 S 相距 R。转过角度 θ 之后，她朝岸边前进的距离为 $x = R\sin\theta$，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时达到最大值 R；这时她正与岸边平行地运动，其后便会弯离岸边。所以她能避开岸边的条件是

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

（若恰好 $d = MV^2/F$，她会刚好擦过岸边，沿着岸边运动。）

方法二：煞停

现在力沿着她的运动直线正向后作用，所以她沿直线朝岸边运动，并逐渐减速。由于我们要求的是距离而不是时间，把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由牛顿（Newton）第二定律得

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

分离变量（separating the variables），并由 $x = 0$（该处 $v = V$）积分至她停下的位置 $x = X$：

$$\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,$$
$$\left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 = -\frac{FX}{2MV^2},$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},$$

所以她的停止距离（stopping distance）为

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

想一想 她真的会停下来吗？还是她的速率只会趋近于零，而她永远在缓缓向前挪动？

煞停的力永远不会低于 $\frac{1}{2}F$，所以她的速率会在有限时间内降至零。具体来说，把 $M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$ 积分可得 $\frac{2MV}{F}(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}) = t$，所以她在 $t = \pi MV/(2F)$ 时停下，其间走过有限的距离 X。（一旦静止，她便不再施力。）因此当 $d > X$ 时，煞停可以救她；若 $d = X$，她到达岸边时速率为零，只是碰到岸边而没有任何撞击。

比较两种方法

由于 $\ln 2 \approx 0.693 < 1$，停止距离比转弯半径短：煞停是较佳的方法，而且凡是转弯行得通的情况，煞停也行得通。因此，她能够避免撞上岸边，当且仅当

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

（而 $d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$ 是临界情况，这时她到达岸边时刚好静止）。

质点假设

真实的溜冰者是有大小的：她的身躯和手臂会伸到质心（centre of mass）前方一段距离，所以实际上她所需的 d 要比上述数值大，多出的大约就是这段伸展的长度。更重要的是，这些力来自她的冰刀对冰面的作用。要转弯，她必须向弯内倾侧；要急煞，她必须把冰刀扭至横向于运动方向（即冰球式急停，hockey stop），这会令她的身体转向侧面。这类转动与姿势，正是质点模型所忽略的。模型还暗中假设了冰面确实能够提供这些力，尽管冰面被称为光滑；即使沿冰刀方向没有摩擦力，冰刀在横向仍能抓紧冰面。

验算

- 单位：MV^2/F 的单位是 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$，是长度，正如所应得的。
- 上下界：煞停的力介乎 $\frac{1}{2}F$ 与 F 之间。恒力 F 会令她在距离 $MV^2/(2F)$ 内停下，而恒力 $\frac{1}{2}F$ 则为 MV^2/F；事实上确有 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$。
- 数值验证：随机选取 M、V、F（例如 $R = MV^2/F = 7.0747$），以龙格－库塔（Runge–Kutta）积分法逐步计算两种运动，得出转弯时最远前进距离为 7.0747，煞停时停止距离为 $4.9038 = R\ln 2$，停止时间为 $\pi MV/(2F)$。

常见错误

- 把圆心放在运动直线上（或放在岸边），因而得出前进距离为 $2R$ 或 0；其实圆心应在她的旁边，前进距离才是 R。
- 处理煞停时使用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，然后苦于求不出距离；用 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 只需积分一次便可得出。
- 给出两个各自独立的条件，却没有加以比较。题目问的是她能够脱险的 d 值所成的集合，所以我们需要的是两种方法中较佳的一种。

STEP 之外

写出 $\ddot{x} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 是迈向能量方法的第一步：对于只取决于位置的力，它就是功能定理（work–energy theorem），而在大学力学中，它会发展成势（potential）以及描述运动的相平面（phase plane）图。溜冰者在转向与煞停之间的抉择，也是一个简单的最优控制（optimal control）问题：怎样运用有限的力来避开障碍物，才是最好的方法？Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正好在高一个层次上讨论取决于速度的力和圆周运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。