详细解答

STEP I 1988，第 11 题

力学 • 质心

> **STEP I 1988，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

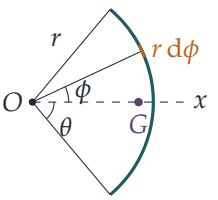
关键思路

对于圆弧，由对称性可知质心（centre of mass）位于平分圆弧的半径上，只需对角度作一次积分，便可求出质心与圆心的距离。至于框架，最值得注意的是它以半圆上的每一点着地都能平衡。地面的反作用力（reaction）总是沿半圆的半径作用，而同时位于所有这些半径上的点只有圆心。因此整个框架的质心必定是半圆的圆心，再对该点取力矩（moments），便得到一条关于 h 的方程。

解答

均匀圆弧

设圆弧的圆心为 O，每单位长度的密度为 ρ。从平分圆弧的半径起量度角 ϕ，则圆弧为 $-\theta \leq \phi \leq \theta$。取 x 轴沿该平分线。由于圆弧关于此轴对称，质心必在此轴上，故只需求 $\bar{x}$。



介乎 ϕ 与 $\phi + \mathrm{d}\phi$ 之间的线元长度为 $r\,\mathrm{d}\phi$，故质量为 $\rho r\,\mathrm{d}\phi$，而它的 x 坐标为 $r\cos\phi$。总

质量为 $\rho r \cdot 2\theta$。因此

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi \; \rho r \, \mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r[\sin\phi]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

所以质心位于平分圆弧的半径上，与圆心的距离为

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

对于半圆弧，$\theta = \frac{\pi}{2}$，此距离为 $\dfrac{2r}{\pi}$，这正是下文要用到的情况。

框架：质心必须在哪里？

我们把框架视为刚体（rigid body），由每单位长度密度同为 ρ 的均匀幼杆组成，并假设地面是水平的。设 O 为半圆的圆心，亦即长方形底边的中点。

> **想一想** 为甚么“以半圆上任何一点着地都处于平衡（equilibrium）”就能完全确定质心的位置？

假设框架以半圆上的点 P 着地而静止。地面在 P 点与半圆相切，所以通过 P 的铅垂线垂直于该切线：它就是半径所在的直线 OP。作用于框架的力只有两个，即作用于质心 G 的重量和作用于 P 的反作用力。要达至平衡，两力必须沿同一直线作用，所以 G 位于通过 P 的铅垂线上，亦即直线 OP 上。这对半圆上的每一点 P 都成立。两个不同的点 P 给出两条通过 O 的不同直线，而它们只相交于 O。因此 $G = O$。

反过来说，若 $G = O$，则对每一点 P，重量都沿 OP 作用，刚好穿过接触点，所以框架无论以哪一点接触地面都处于平衡。因此题目的条件恰好等同于“G 位于 O”。

对底边取力矩

对底边所在的直线取力矩，高度由 O 起向上量度（故半圆在该直线之下）。各部分如下：

部分	质量	其质心的高度	力矩
顶杆	$2r\rho$	$2h$	$4rh\rho$
两条侧杆	$2 \times 2h\rho$	h	$4h^2\rho$
底杆	$2r\rho$	0	0
半圆	$\pi r\rho$	$-\dfrac{2r}{\pi}$	$-2r^2\rho$

半圆的质心由圆弧公式取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得出，而且它在 O 的下*方*。由于 G 的高度为 0，令总力矩等于零，再除以 2ρ：

$$2h^2 + 2rh - r^2 = 0.$$

这是一条关于 h 的二次方程，其根为

$$h = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})\, r}{2}.$$

由于 $h > 0$，我们取正根：

$$\boxed{h = \frac{(\sqrt{3} - 1)\, r}{2} \approx 0.366\, r}$$

留意底杆对它本身所在直线的力矩为零。无论框架是否包括底杆，答案都一样，所以对图形的理解稍有不同亦无妨。

验算

- 当 $\theta \to 0$ 时，$\frac{r\sin\theta}{\theta} \to r$：极短的圆弧，其质心就在圆弧本身之上。对于整个圆，$\theta = \pi$，我们得到 0，即圆心，正如对称性所要求。
- 取 $h = \frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$：$2h^2 = (2 - \sqrt{3})r^2$ 而 $2rh = (\sqrt{3} - 1)r^2$，两者相加为 r^2，符合要求。
- 我们把每条杆分成 20 000 小段，以数值方法计算质心。取 $r = 1$ 及 $h \approx 0.36603$，质心与 O 的距离小于 10^{-9}。把 h 增加 10%，质心便上移约 0.03，框架就不能再平衡了。

常见错误

- 误用 $\frac{4r}{3\pi}$，那是半圆形薄片（lamina）的结果；半圆形金属线应使用 $\frac{2r}{\pi}$。
- 以角度而非长度作加权：线元的质量是 $\rho r\, \mathrm{d}\phi$，因子 r 之所以能约去，只因为它同样出现在总质量之中。
- 没有给出理由便断言 G 位于 O。论证的关键在于反作用力总是沿半径作用。

STEP 之外

圆弧的积分是把质心表示为沿曲线的线积分（line integral）$\int \mathbf{r}\rho\, \mathrm{d}s$ 的最简单例子。大学一年级的课程会进一步利用二重积分和三重积分处理曲面和立体，而帕普斯（Pappus）定理则把这些质心与旋转体的面积和体积联系起来。这个平衡论证也是摇摆稳定性背后的想法：物体搁在曲面上时，若其质心低于曲率中心（centre of curvature），它便是稳定的。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种精神处理质心和刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。