详细解答

STEP I 1988，第 10 题

力学 · 抛体运动

> **STEP I 1988，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

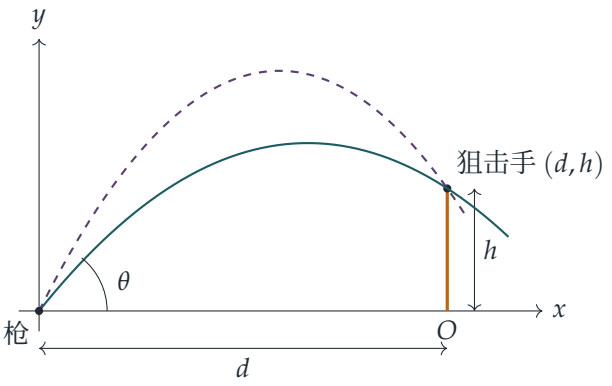
关键思路

把问题反过来想。设枪与树脚的水平距离为 d，然后问：是否存在*任何*一个仰角，使速率为 v 的子弹刚好经过树顶？以 $\tan\theta$ 表示的轨迹方程，是 $\tan\theta$ 的二次方程，所以答案为“是”的充要条件，就是该二次方程有实根。由判别式（discriminant）得出的条件，原来是一个只涉及 d 的不等式。

解答

模型

我们把子弹视为只受重力作用的质点（particle）（不计空气阻力），由地面以速率 v、与水平成 θ 的仰角（angle of elevation）射出，其中 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$。由于枪的位置未知，设它与树脚 O 的距离为 $d \geq 0$，并以枪为原点建立坐标轴，x 轴水平指向树，y 轴铅垂向上。于是树顶就是点 (d, h)。



击中狙击手

经过时间 t 后，子弹位于 $x = vt\cos\theta, y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$。若 $\theta < \frac{\pi}{2}$，我们以 $t = x/(v\cos\theta)$ 消去时间，并利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，得到轨迹（trajectory）

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta).$$

子弹击中狙击手，当且仅当 (d,h) 位于这条曲线上。先假设 $d > 0$。记 $T = \tan\theta$ 及 $k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$，条件就是

$$kT^2 - dT + (h+k) = 0.$$

每个实数 T 都恰好是唯一一个 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的 $\tan\theta$。不过，根会不会是负数呢？两根之积为 $(h+k)/k > 0$，两根之和为 $d/k > 0$，所以只要有实根，两根都必为正数，对应真正的仰角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。因此，存在可行的仰角，当且仅当这个二次方程有实根，亦即其判别式非负：

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h+k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad \text{（除以 } d^2 > 0\text{，再乘以 } v^4\text{）} \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gh). \end{aligned}$$

> ? **想一想** 假如枪就在树脚，即 $d = 0$，以致上面的轨迹方程派不上用场，那又如何？

这时子弹必定是铅垂向上射出的（$\theta = \frac{\pi}{2}$），而它能到达高度 h，当且仅当 $v^2 \geq 2gh$；这可由 $v^2 = u^2 - 2gs$ 及末速率不小于零得出。这正是 $d = 0$ 时的同一条件，所以该不等式涵盖了所有情况。

由于 $d \geq 0$，取非负平方根便得

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

所以枪位于水平地面上的某一点，而该点与树脚的距离至多为 $(v/g)\sqrt{v^2-2gh}$：它位于以树脚为圆心、以此为半径的圆之内（极端情况下则在圆上），正如所求。平方根是实数，因为我们知道这一枪确实发生了：取 $d = 0$ 时，不等式迫使 $v^2 \geq 2gh$，这不过是说子弹有足够的能量升到高度 h。

这个条件也是充分的。从圆内任何一点出发，该二次方程都有两个正实根，所以有两个可能的仰角（一个较平、一个较陡的射击，如图所示）；而在圆上，两者合而为一。

验算

- 当 $h = 0$ 时，半径为 v^2/g，正是大家熟悉的水平地面上的最大射程。当 $v^2 \to 2gh$ 时，半径缩小至 0：枪只有在树脚笔直向上射击，才仅仅能够击中狙击手。
- 单位：$(v/g)\sqrt{v^2}$ 的单位是 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$v = 20$ 及 $h = 8$，半径约为 31.8 m。从 $d = 31.8\,\mathrm{m}$ 出发，以唯一容许的仰角 $\tan\theta = v^2/(gd)$ 逐步推算运动，子弹到达树的位置时高度为 8.000 m。再对所有仰角逐一扫描，可确认圆外百分之几的点无法击中目标，而圆内的点则可以。

常见错误

- 只用最大射程 v^2/g 或只用最大高度。狙击手位于高度 h，所以两个坐标必须同时考虑。
- 忘记检查 $\tan\theta$ 的根是否对应水平以上的仰角，或忽略了 $d = 0$ 的铅垂射击。

STEP 之外

对于固定的 v，由枪可以射到的点填满了抛物线 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ 以下的区域；这条抛物线是整族轨迹的**包络线**（envelope），又称“安全抛物线”（parabola of safety）。我们的判别式条件，正正就是 $h \leq$ 这条包络线在 $x = d$ 处的高度。曲线族的包络线，在变分法（calculus of variations）和一阶微分方程的理论中还会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材），以同样严谨的方式处理抛体问题，是很好的进阶读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。