详细解答

STEP I 1988，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP I 1988，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q1

关键思路

方程 $n^m = m^n$ 把两个变量分别放在底数和指数的位置，纠缠在一起，处理起来并不方便。取对数（logarithm）后得到 $m\ln n = n\ln m$，再除以 mn 便可把两者完全分开：$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$。因此我们要找两个不同的整数，使 h 在这两处取相同的值，而图像的形状正好告诉我们这样的数对可以出现在哪里。

解答

h 的图像

用商法则（quotient rule）求导，

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

由于 $x^2 > 0$，$\mathrm{h}'(x)$ 的正负号与 $1-\ln x$ 的正负号相同。所以 h 在 $(0,\mathrm{e})$ 上严格递增（strictly increasing），在 (e,∞) 上严格递减（strictly decreasing），并在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值（maximum），其值为

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

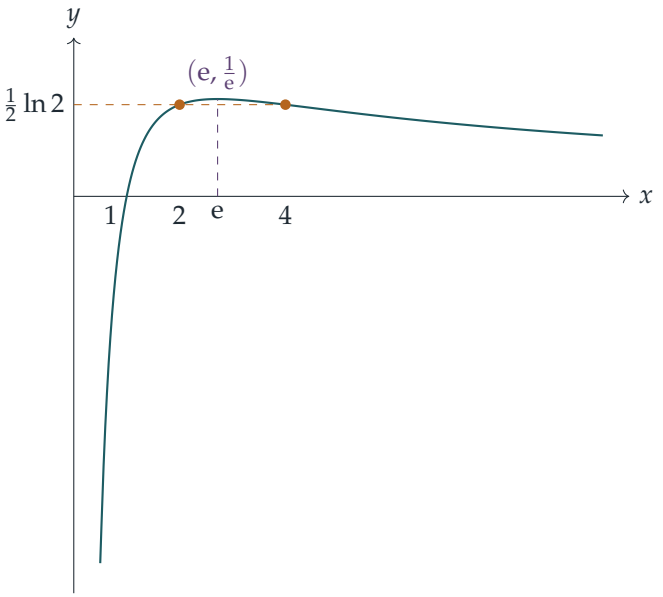
再求导一次，

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

所以在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 处有一个拐点（point of inflection），该处 $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$。曲线在这一点的左方是凹（concave）的，在右方是凸（convex）的。

接着看两端的变化趋势和函数的正负：

- 当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x \to -\infty$ 而 $\frac{1}{x} \to +\infty$，所以 $\mathrm{h}(x) \to -\infty$：$y$-轴是一条渐近线（asymptote）。
- $\mathrm{h}(1) = 0$，而 $\mathrm{h}(x)$ 的正负号与 $\ln x$ 相同：在 $(0,1)$ 上为负，当 $x > 1$ 时为正。
- 当 $x \to \infty$ 时，$\frac{\ln x}{x} \to 0$（对数的增长比 x 的任何正数次幂都要慢），而且该处 $\mathrm{h}(x) > 0$，所以曲线从上方趋近 x-轴。



方程 $n^m = m^n$

由于 m 和 n 都是正数，等式两边均为正，可以取对数：

$$n^m = m^n \iff m\ln n = n\ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

其中中间一步除以了 $mn > 0$。所以我们要找满足 $\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$ 的相异正整数。由对称性，不妨设 $m < n$。

想一想 图像上哪些位置可以有两个不同的点处于同一高度?

由于 h 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上严格递增，在 $[\mathrm{e},\infty)$ 上严格递减，它在这两个区间上各自都是一对一（one-to-one）的。所以，输出相同的两个相异输入必定分处 e 的两侧：$m < \mathrm{e} < n$。由于 m 是正整数而 $\mathrm{e} \approx 2.718$，故 $m = 1$ 或 $m = 2$。

- 若 $m = 1$，则 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$，由此必有 $\ln n = 0$，即 $n = 1 = m$，不合要求。（直接来看：$n^1 = 1^n$ 给出 $n = 1$。）

- 若 $m = 2$，则需要一个整数 $n \geq 3$ 使得 $\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$。而 $n = 4$ 正好符合，因为

$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$

  也就是 $4^2 = 16 = 2^4$。由于 h 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减，它在该处取 $\frac{1}{2}\ln 2$ 这个值至多一次，所以 $n = 4$ 是唯一的可能。

因此，满足 $n^m = m^n$ 的相异正整数对只有

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{及} \quad (m, n) = (4, 2).$$

验算

用电脑以精确的整数运算搜索所有 $1 \leq m, n \leq 300$，只找到 $(2, 4)$ 和 $(4, 2)$。数值上，$\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$，仅略低于极大值 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$，与图像所示吻合。你也可以看出为甚么 $\mathrm{h}(3)$ 得不出任何解：$\mathrm{h}(3) \approx 0.366$ 大于 $\mathrm{h}(2)$，它在 e 左方的对应点严格介乎 2 与 e 之间，所以不是整数。

常见错误

- 靠试数找到 $(2, 4)$ 便就此停笔。题目要求找出*所有*数对，所以用单调性（monotonicity）论证再没有其他数对，才是答案的核心。
- 画草图时忘记渐近性态：曲线在 y-轴附近直坠至 $-\infty$，但当 $x \to \infty$ 时只是缓缓趋向 0，此后不再穿过横轴。

STEP 之外

如果容许实数，则 $(1, \mathrm{e})$ 内的每个 a 都恰好有一个对应的 $b > \mathrm{e}$ 使得 $a^b = b^a$，而这些数对可以简洁地参数化（parametrise）为 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$，$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；当 $t \to \infty$ 时两者都趋向 e，也就是图像顶端两边相会之处。我们用过的极限 $\frac{\ln x}{x} \to 0$ 是比较增长率的第一个例子，大学的第一门分析课程会把它严格化；参见 Abbott, *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。