详细解答

STEP III 1987，第 8 题

纯数学 · 平行四边形面积不等式

STEP III 1987，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q8

关键思路

平行四边形（parallelogram）的对角线（diagonal）互相平分（bisect），因此把它分成四个三角形，而这些三角形的面积可以用 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 立即写出。这样便得到一条以对角线及其夹角表示面积的公式，题目开首的两个结果都可由此直接推出。集合 A 是两条带状区域相交之处，所以是一个平行四边形。只要求出它的面积，第二个结果便告诉我们它较长的对角线必定够长，而这条对角线的两个端点正是我们要找的点。

解答

以对角线表示面积

设两条对角线的长度为 p 和 q，相交所成的角为 θ，其中 $0 < \theta < \pi$。平行四边形的对角线互相平分，所以把它分成四个三角形，每个三角形都有两条边 $\frac{1}{2}p$ 和 $\frac{1}{2}q$ 在中心相交。其中两个三角形在该处的角为 θ，另外两个则为 $\pi - \theta$。由于 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$，每个三角形的面积都是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$，所以

$$\text{面积} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

若 p 和 q 固定，则当 $\sin\theta$ 最大时面积最大，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 之时。因此面积取最大值，当且仅当两条对角线互相垂直，而最大面积为 $\frac{1}{2}pq$。

以较长对角线表示的上界

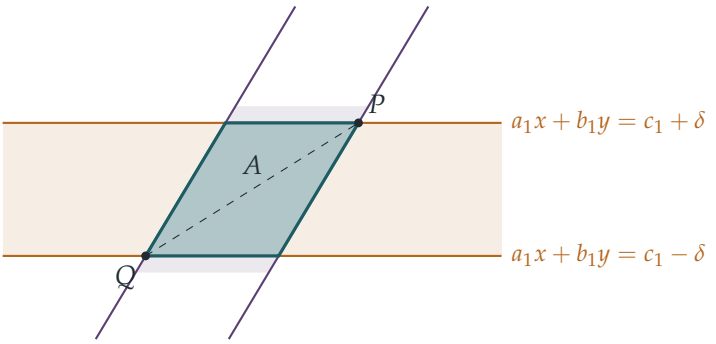
设 $p \geq q$，即 p 是较长的对角线（或两条等长对角线的其中一条）。先用 $\sin\theta \leq 1$，再用 $q \leq p$，得

$$\text{面积} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

所以面积最多是较长对角线平方的一半。等号成立需要 $\sin\theta = 1$ 及 $q = p$，故只有正方形才能取等号。

集合 A 是平行四边形

假设 $\delta > 0$。（若 $\delta = 0$，则上界为 0，把 A 中任意一点取两次即可。）不等式（inequality）$|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ 的意思是 $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$。因此它描述的是两条平行线 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 之间的闭带状区域（closed strip）。同理，第二条不等式给出第二条带状区域。条件 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ 表示法向量（normal vector）$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ 与 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ 不平行。所以两条带状区域相交，而且 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 都不是零向量。它们的交集（intersection）A 是一个平行四边形，由两对平行线围成。



图中显示第一条带状区域（琥珀色）和第二条带状区域的一部分（紫红色）。它们的交集 A（蓝绿色）是一个平行四边形，虚线是它较长的对角线。

A 的面积

平行线 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 之间的距离为

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

这里用了点到直线的距离公式。同理，第二条带状区域的阔度为 $h_2 = 2\delta / \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$。设 φ 为两组直线之间的夹角，其中 $0 < \varphi < \pi$。在 A 的各边之中，位于第二条带状区域边界上的两条边以角 φ 横越第一条带状区域，所以每条的长度为 $h_1 / \sin\varphi$。这两条边之间

的垂直距离为 h_2，所以

$$\text{面积}A = \frac{h_1 h_2}{\sin\varphi}.$$

想一想 怎样由各系数求出 $\sin\varphi$?

两条直线之间的夹角等于它们法线之间的夹角，或该角的补角（supplement），而两者的正弦值相同。对于向量 $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$，它们所张成的平行四边形面积为 $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$。这个面积亦等于 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$，即 2×2 行列式（determinant）的绝对值。因此

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

代入后，平方根互相抵消：

$$\text{面积}A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}.$$

所求的两点

设 PQ 为 A 较长的对角线，并记 $P = (x_1, y_1)$ 及 $Q = (x_2, y_2)$。这两点是 A 的顶点，而带状区域包含其边界线，所以它们都在 A 之内。由第一部分的上界，

$$\frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \text{面积}A \le \tfrac{1}{2}PQ^2,$$

所以

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|},$$

这正是所要证明的。

验算

- 取 $a_1 = b_2 = 1$ 及 $a_2 = b_1 = 0$，则 A 是正方形 $|x - c_1| \le \delta$，$|y - c_2| \le \delta$。它的对角线平方为 $(2\delta)^2 + (2\delta)^2 = 8\delta^2$，刚好等于上界。这是合理的，因为正方形正是第一部分中等号成立的情况。
- 缩放：若把 a_1、b_1 和 c_1 都加倍，第一条带状区域的阔度减半，A 的面积减半，而 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ 则加倍。公式的变化与此吻合。
- 我们用电脑测试了 10^5 个随机例子。我们解边界方程求出 A 的顶点，再用鞋带公式（shoelace formula）计算面积，每次都与 $4\delta^2/|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ 相符。（较长对角线）^{2} 与上界之比的最小值为 1.0007，从未低于 1。

常见错误

- 把带状区域的阔度当作 2δ。其实 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ 的阔度是 $2\delta / \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$。
- 忘记说明为何所选的点在 A 之内。原因是它们是顶点，而 A 包含其边界。
- 把 A 的面积写成 h_1h_2，这只在两条带状区域互相垂直时才正确。

STEP 之外

这个面积计算是一个基本事实的特例：矩阵为 M 的线性映射（linear map）会把所有面积乘以 $|\det M|$。这里的映射 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$ 把 A 映到一个面积为 $4\delta^2$ 的正方形，所以 A 的面积为 $4\delta^2 / |\det M|$。这就是在二重积分（double integral）中作变量代换时遇到的雅可比（Jacobian）因子。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）正是以这种方式，把行列式看作面积和体积来阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。