详细解答

STEP III 1987，第 7 题

纯数学 · 反正切的级数

STEP III 1987，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q7

关键思路

$\tan^{-1} t$ 的级数（series）来自对 $1/(1+x^2)$ 求积分，而 $1/(1+x^2)$ 正是公比为 $-x^2$ 的等比级数（geometric series）之和。把等比级数在有限项之后截断，会留下一个精确的余项（remainder），再对这个余项积分，便得到误差项（error term）。在 $[0,1]$ 上，因子 $1/(1+x^2)$ 介乎 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间，于是误差便被夹在两个容易计算的积分之间。

解答

恒等式

对任意实数 x，首项为 1、公比为 $-x^2$ 的有限等比级数给出

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

此式成立，因为公比 $-x^2$ 永远不等于 1。移项整理，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

这是一个精确的恒等式（identity），并非近似。把两边由 0 积分至 t。由于 $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$ 及 $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$，

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

这正是所求。此式对所有实数 t 均成立。

上下界

记 $S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$。由上述恒等式，

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

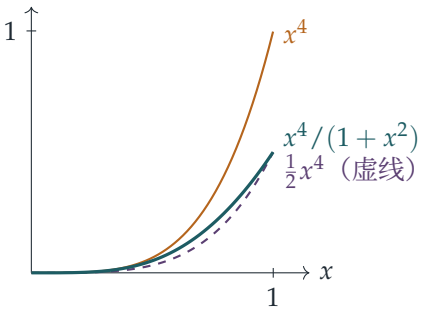
右边的绝对值符号可以略去，因为当 $t \geq 0$ 时，被积函数（integrand）非负，而且积分是由小到大进行的。

> **想一想** 一个无法以闭合形式（closed form）求值的积分，我们可以怎样估计？

用常数来界定被积函数中难处理的部分。当 $0 \leq x \leq 1$ 时，我们有 $1 \leq 1+x^2 \leq 2$，所以

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

下图显示 $n = 1$ 的情况：被积函数（蓝绿色）被夹在 x^4 与 $\frac{1}{2}x^4$ 之间。



把这些不等式由 0 积分至 t（由于 $t \geq 0$，不等号方向保持不变），得

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

这就是所要证明的结果。

π 的级数

取 $t = 1$，此时 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ 而 $S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$。由上界（upper bound）可得

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{当} n \to \infty,$$

所以 $4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$。

想一想 两个界之中，哪一个告诉我们这个近似很差？

是下界（lower bound）：它说明误差不可能很小。把 $t=1$ 时左边的不等式乘以 4，

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

若 $n \leq 98$，则 $2n+3 \leq 199 < 200$，所以 $\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$。因此对所有 $n \leq 98$，误差至少为 10^{-2}（事实上严格大于此数）。由于误差小于 $4/(2n+3)$，一百项只换来大约两个小数位的准确度，所以用这个级数来计算 π 是非常缓慢的。

验算

- $n=0$，$t=1$：上下界给出 $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4}-1\right| \leq \frac{1}{3}$。事实上 $1-\frac{\pi}{4} \approx 0.215$。
- 以数值计算，当 $n=98$ 时误差为 $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$，仅仅高于 10^{-2}。当 $n=99$ 时误差约为 0.0099998，仅仅低于此值。所以 98 正好是分界点。我们亦以数值积分（quadrature）对随机的 t 和 n 验证了恒等式，并对数千个随机的 $t \in [0,1]$ 验证了双边的界。

常见错误

- 把 $1/(1+x^2)$ 展开成无穷级数，然后逐项积分。这样做需要 $|x|<1$，还要说明为何可以交换求和与积分的次序。采用带有精确余项的有限形式，则两者皆可避免。
- 用上界来论证误差很大。只有下界才能做到这一点。

STEP 之外

这其实是带积分形式余项的泰勒定理（Taylor's theorem），只是针对一个函数亲手推导出来。$t=1$ 时的级数就是莱布尼兹（Leibniz）级数，又称马德哈瓦（Madhava）–格雷果里（Gregory）级数。它的误差大约为 $1/(2n)$，这是各项递减缓慢的交错级数（alternating series）的典型表现。较快的公式，例如梅钦（Machin）公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$，是把同一个级数用于较小的 t，此时 t^{2n+3} 会迅速缩小。若想了解余项与收敛（convergence）的严格处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。