详细解答

STEP III 1987，第 6 题

纯数学 · 耦合微分方程

> **STEP III 1987，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q6

关键思路

处理一对耦合的一阶方程（coupled first-order equations），最好的做法是把它们化为只含一个未知函数的二阶方程。利用第一条方程，可把 y 用 x 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示，再代入第二条方程，便得到一条关于 x 的受迫振子（forced oscillator）方程。答案的整体性质，就取决于这个振子的固有频率（natural frequency）与外力项 $2\cos t$ 的频率相比如何。

解答

以字母上方加点表示对 t 的导数。

消去 y

由第一条方程，

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{所以} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

把两者代入第二条方程，再乘以 5，

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$

$$\ddot{x} + \left(5a - 4\right)x = 10\cos t.$$

含 $\dot{x}$ 的项互相抵消，所以没有阻尼（damping）：这是一个纯粹的受迫振子，固有频率为 $\sqrt{5a-4}$（当 $5a > 4$ 时）。

转换初始条件

题目给出 $x(0)=0$ 和 $\dot{y}(0)=0$，但关于 x 的方程需要的是 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$。把 $t=0$ 代入原来的第二条方程：

$$\dot{y}(0)+a\,x(0)-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad 0+0-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad y(0)=-1.$$

然后由第一条方程在 $t=0$ 的情况，得 $\dot{x}(0)=5y(0)-2x(0)=-5$。留意这两步都没有用到 a 的值，所以

$$x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=-5 \qquad \text{对所有}a.$$

> **想一想** 条件是关于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的，而不是关于 y 的。我们该怎样运用它？

微分方程本身已把 x、y 及它们的导数在任何一个时刻的值联系起来。在 $t=0$ 时，第二条方程把关于 $\dot{y}(0)$ 的资料转化为关于 $y(0)$ 的资料，第一条方程再把它转化为 $\dot{x}(0)$，而这正是关于 x 的二阶方程所需要的。

$a=1$ 的情况

这时方程为

$$\ddot{x}+x=10\cos t.$$

余函数（complementary function）是 $A\cos t+B\sin t$。外力项 $\cos t$ 本身就是齐次方程（homogeneous equation）的解（这就是共振（resonance）），所以试用 $C\cos t$ 是行不通的，我们改试 $x_p=t\,(C\cos t+D\sin t)$。求导两次，

$$\ddot{x}_p+x_p=-2C\sin t+2D\cos t,$$

所以 $C=0$ 及 $D=5$，得 $x_p=5t\sin t$。因此

$$x=A\cos t+B\sin t+5t\sin t.$$

由条件 $x(0)=0$ 得 $A=0$。于是 $\dot{x}=B\cos t+5\sin t+5t\cos t$，所以 $\dot{x}(0)=B=-5$。因此

$$\boxed{x=5(t-1)\sin t}$$

至于 y，利用 $y=\frac{1}{5}(\dot{x}+2x)$ 以及 $\dot{x}=5\sin t+5(t-1)\cos t$：

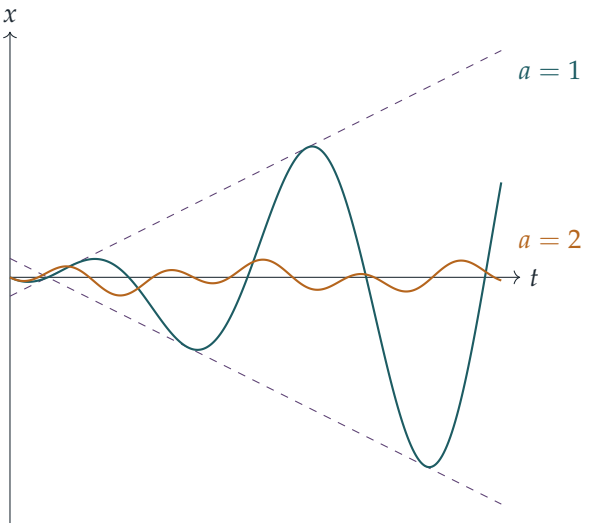
$$y=\sin t+(t-1)\cos t+2(t-1)\sin t, \qquad \text{即} \qquad \boxed{y=(t-1)\cos t+(2t-1)\sin t}$$

简单验算一下：$y(0)=-1$，而由 $\dot{y}=\cos t-(t-1)\sin t+2\sin t+(2t-1)\cos t$ 得 $\dot{y}(0)=1-1=0$，符合要求。

$a > 1$ 的情况

这时 $5a - 4 > 1$，所以可写 $\omega = \sqrt{5a-4}$，其中 $\omega > 1$。方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$ 不再处于共振状态，因为外力频率 1 与固有频率 ω 不同。所以：

- 余函数是 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$，振动周期为 $2\pi/\omega$（比 2π 短），而不再是 2π。
- 特积分（particular integral）只是 $\cos t$ 的倍数，没有因子 t，所以不会出现 $t\sin t$ 这类项。
- 因此 x（以及 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$）是频率为 1 和 ω 的正弦型函数之和。两者对所有 t 都保持有界（bounded），而不像 $a = 1$ 时那样，振幅随 t 线性增长。只有当 ω 是有理数时，运动才是周期性的；一般而言，它是两个振动的叠加（superposition），两者互相产生“拍”（beat）的现象。



验算

- 把 $x = 5(t-1)\sin t$ 和 $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$ 代回原来的两条方程，两者均恒等成立。逐步数值求解（由 $x = 0$、$y = -1$ 出发的四阶龙格－库塔法（Runge–Kutta））所得结果，在 $0 \le t \le 10$ 上与公式相差不超过 10^{-10}；例如 $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$。
- 当 $a > 1$ 时，完整的解原来是 $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos\omega t) - \frac{5}{\omega}\sin\omega t$。当 $a \to 1$ 时，有 $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$ 及 $\cos t - \cos\omega t \approx (\omega - 1)\, t\sin t$，由此重新得到 $5t\sin t - 5\sin t$。共振情况的答案正是非共振情况的极限（limit）。

常见错误

- 直接用 $y(0) = 0$，而没有从 $\dot{y}(0)$ 的条件推出 $y(0) = -1$。
- 当 $a = 1$ 时试用 $C\cos t + D\sin t$ 作为特积分：它是余函数的一部分，所以只会得出 $0 = 10\cos t$。
- 另外引入新的任意常数来独立求解 y：一旦知道 x，y 就由 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$ 完全确定。

STEP 之外

这类线性方程组其实就是 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$，其中 $\mathbf{v} = (x, y)$，而 M 是常数矩阵；M 的特征值（eigenvalue），在这里是 $\pm\sqrt{4 - 5a}$，决定了自由运动是增长、衰减还是振动。当外力频率与特征值 $\pm\mathrm{i}$ 吻合时，便会出现共振，而这正好就是 $a = 1$。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）既讲解如何用矩阵处理方程组，也讨论受迫振动以及共振和拍的现象。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。