详细解答

# STEP III 1987，第 4 题

纯数学 • 旋转体的体积

**STEP III 1987，第 4 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

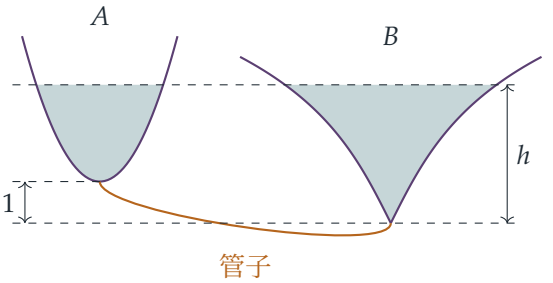
step.maths.org/questions/87-s3-q4

## 关键思路

水只是由一个漏斗流到另一个漏斗，所以水的体积守恒（conserved）。每个漏斗都是绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体（solid of revolution），因此水深为 $d$ 时，水的体积是 $\int_0^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$，其中 $x^2$ 要以 $y$ 表示。求得两个体积作为深度的函数之后，唯一还要小心的，就是两个不同的基准高度：$A$ 和 $B$ 中的水深相差一个单位。

## 解答

我们假设管子的体积可以忽略不计，并把题目中第二个“closed”理解为“opened”（否则水根本无法流动）。由每个漏斗的底部起向上量度 $y$。



### 以深度表示的体积函数

对于 $A$，曲线为 $y = x^2$，所以在高度 $y$ 处的水平截面是一个圆盘，面积为 $\pi x^2 = \pi y$。$A$ 中水深为 $d$ 时，水的体积是

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \,\mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

对于 $B$，曲线 $y = 2\sinh^{-1} x$（其中 $x > 0$）的反函数（inverse）是 $x = \sinh \frac{y}{2}$。利用 $\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$，$B$ 中水深为 $d$ 时，水的体积是

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} (\sinh d - d).$$

### 水量守恒

开始时，$A$ 盛有深度为 4 的水，而 $B$ 是空的，所以总体积是

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

最后，两个水面都在 $B$ 的底部之上高度 $h$ 处。因此 $B$ 中的水深等于 $h$。$A$ 的底部比 $B$ 的底部高一个单位，所以 $A$ 中的水深是 $h - 1$。

> ? **想一想** 为甚么两个水面最终会处于同一高度?

两个漏斗和管子构成一个连通而静止的水体。水中的压强只取决于高度，而两个自由水面都处于大气压强之下，所以它们位于同一高度。题目已经告诉我们这一点，但这也解释了为甚么两个水深之差恰好等于两个底部的高度差。

水既没有增加，也没有减少，所以

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2} (\sinh h - h) = 8\pi.$$

乘以 $2/\pi$ 并展开，得

$$\begin{aligned} (h-1)^2 + \sinh h - h &= 16 \\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16 \\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15, \end{aligned}$$

这就是所要求的方程。

中间一行的左方只在 $h \geq 1$ 时才是合理的模型，因为这时 $A$ 才真正盛有水。在这个范围内，它的导数 $2(h-1) + \cosh h - 1$ 是正数，所以方程恰好有一个符合题意的根。数值上 $h \approx 3.33$，所以 $A$ 中的水深由 4 降至约 2.33。

## 验算

- 以二分法（bisection）求得 $h \approx 3.3272$。于是 $V_A(h-1) + V_B(h) \approx 25.1327$，与 $8\pi \approx 25.1327$ 吻合。
- 对 $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$ 使用辛普森法则（Simpson's rule），所得结果在多个 $d$ 值下都与 $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$ 一致（例如 $d = 1.7$ 时，两种方法都得出 1.48540）。
- 合理性：$h - 1 < 4$，所以 $A$ 中的水位下降了；水从中流出，水位理应下降。

## 常见错误

- 在两个漏斗中都用深度 $h$，忘记了 $A$ 的底部高出一个单位。这样会得出 $h^2 - h + \sinh h = 16$。
- 对 $\pi y^2\,\mathrm{d}x$ 积分（即绕 $x$ 轴旋转），而不是对 $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ 积分。
- 把 $y = 2\sinh^{-1} x$ 的反函数写成 $x = 2\sinh y$ 或 $x = \frac{1}{2}\sinh y$。正确的反函数是 $x = \sinh\frac{y}{2}$。

## STEP 之外

最后的方程把多项式和双曲函数（hyperbolic function）混在一起，所以没有闭合形式（closed-form）的解，必须用数值方法求解；而上面的单调性（monotonicity）论证，正好保证了二分法或牛顿–拉弗森法（Newton–Raphson）之类的方法能找到那个唯一具物理意义的根。大学一年级的数值分析（numerical analysis）会利用介值定理（intermediate value theorem）和收敛速度（convergence rate）把这一点严格化。至于背后的分析学，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。