详细解答

STEP III 1987，第 3 题

纯数学 · 辐角与梅钦公式

STEP III 1987，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

本题在 *Beyond STEP* 第 5.1 节梅钦公式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/machin.html

关键思路

两部分都建基于复数（complex number）的极式（polar form）。在 (i) 中，点 $(|x|, |y|)$ 与原点的距离为 $|z|$，所以 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 等于 $|z|$ 乘以一个余弦值。在 (ii) 中，复数相乘时，辐角（argument）相加。因此，若由 $5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 这类数组成的乘积结果非常接近实数，它的辐角便会给出一条关于反正切（inverse tangent）的恒等式。唯一真正需要小心的，是辐角中 2π 的不确定性。

解答

第 (i) 部分

设 $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$。若 $r = 0$，则 $x = y = 0$，各项均为 0，故以下假设 $r > 0$。

*右边的不等式。*两边均为非负数，所以只需比较两边的平方：

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

这是因为 $|x||y| \geq 0$。取非负平方根，得 $|z| \leq |x| + |y|$，等号成立当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$。

*左边的不等式。*点 $(|x|, |y|)$ 位于闭第一象限内，与原点的距离为 r，所以存在角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 使得

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

于是，由复角公式（compound-angle formula），

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha-\varphi) \le r = |z|,$$

因为对任意实数 α 都有 $\cos(\alpha-\varphi) \le 1$。这就证明了两条不等式。左边的等号在 $\alpha = \varphi + 2k\pi$ 时成立，即 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 与 $(|x|, |y|)$ 方向相同之时。

（左边不等式的另一证法：由柯西–施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality），$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = |z|$。）

第 (ii) 部分：第一条公式

逐步展开：

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i}).\end{aligned}$$

现在比较辐角。设 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$。由于 $5-\mathrm{i}$ 位于第四象限，它的辐角为 $-\theta$，而 $1+\mathrm{i}$ 的辐角为 $\frac{\pi}{4}$。同理，$4(239-\mathrm{i})$ 的辐角为 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。复数相乘时辐角相加，但可能相差 2π 的整数倍，所以

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{对于某个整数} k.$$

想一想 我们怎样知道 $k = 0$?

我们估计两边的范围。由于当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时 $\tan t > t$，我们有 $0 < \theta < \frac{1}{5}$，所以 $\frac{\pi}{4} - 4\theta$ 介乎 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$ 与 $\frac{\pi}{4} < 1$ 之间。另外，$-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ 介乎 -1 与 0 之间。$(-1, 1)$ 内的两个数相差小于 $2 < 2\pi$，所以 $2k\pi = 0$，即 $k = 0$。整理后得

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分：第二条公式

按同样的道理，我们需要一个乘积，其辐角为

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

即 $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$，并希望它是一个正实数。把因子 $1985-\mathrm{i}$ 留到最后：

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

所以到目前为止的乘积是 $1985+\mathrm{i}$，而最后一个因子 $1985-\mathrm{i}$ 正是它的共轭（conjugate）：整个乘积为 1985^2+1，是正实数。换一个等价的做法，不乘最后一个因子，直接比较辐角：

$$\frac{\pi}{4}-3\varphi-\psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985}+2k\pi, \qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi=\tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

同样有 $k=0$：由于 $0<\varphi<\frac14$ 及 $0<\psi<\frac{1}{20}$，左边介乎 $\frac{\pi}{4}-\frac45>-1$ 与 $\frac{\pi}{4}<1$ 之间，而右边减去 $2k\pi$ 后位于 $(0,1)$ 内。整理后得

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac14+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

验算

- 模（modulus）很适合用来检查展开的结果。$|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$，而 $956^2+4^2 = 913\,952$ 亦然。同样地，$17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$。
- 数值上，$4\tan^{-1}\frac15\approx 0.789582$，减去 $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$ 得 $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$。另外，$3\tan^{-1}\frac14+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$，加上 $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$ 同样得到 $\frac{\pi}{4}$。
- 在 (i) 中，试取 $z=3-4\mathrm{i}$：不等式变成 $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$，而 $3\cos\alpha+4\sin\alpha = 5\cos(\alpha-\varphi)$ 在 $\tan\alpha=\frac43$ 时取得 5。

常见错误

- 把 $\arg(zw)=\arg z+\arg w$ 当作精确的等式，却从不检查 2π 的倍数。正是对各个反正切值的范围估计，才令最后的等式成立。
- 以 $5+\mathrm{i}$ 代替 $5-\mathrm{i}$：这样 $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4+956\mathrm{i}$，结果接近纯虚数而非接近实数。正负号必须选得令乘积接近实数。
- 在 (i) 中，忘记 α 是任意的，所以 $\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha$ 可能是负数。余弦形式可一次过处理所有 α。

STEP 之外

第一条公式是梅钦公式（Machin's formula，1706 年）。级数 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 x 很小时收敛得很快，前人把它与梅钦公式结合，以人手计算出 π 的许多位小数。寻找这类公式，其实是关于高斯整数（Gaussian integers）$a + b\mathrm{i}$ 的因式分解问题，当中 $1 + \mathrm{i}$、$5 \pm \mathrm{i}$ 和 $4 \pm \mathrm{i}$ 的表现有如质数。这是代数数论（algebraic number theory）的初步体验。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 讨论了二平方和与高斯整数，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则展示了复数相乘的几何意义。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。