详细解答

STEP III 1987，第 2 题

纯数学 · 三角函数归约公式

> **STEP III 1987，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

关键思路

递推公式（reduction formula）的来源，是先对“边界项” $\cos^m x\cos nx$ 求导，再用复角公式（compound-angle formula）把 $\sin x\cos nx$ 化为含有 $\sin(n-1)x$ 的式子。有了这条公式之后，两部分的关键都在于计算该边界项在积分上下限的值：在 0 和 π 处，它会互相抵消还是保留下来，取决于奇偶性（parity）；而在 $\frac{\pi}{2}$ 处，因子 $\cos^m x$ 令它变为零。

（题目印出的公式写作 $-\cos^m\cos nx$；应为 $-\cos^m x\cos nx$。）

解答

递推公式

用积法则（product rule）对 $\cos^m x\cos nx$ 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x\cos nx) = -m\cos^{m-1}x\,\sin x\cos nx \;-\; n\cos^m x\sin nx.$$

第一项还不是我们想要的形式。由复角公式

$$\sin(n-1)x = \sin nx\cos x - \cos nx\sin x \quad \text{可得} \quad \sin x\cos nx = \cos x\sin nx - \sin(n-1)x.$$

代入后，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x\cos nx) &= -m\cos^m x\sin nx + m\cos^{m-1}x\sin(n-1)x - n\cos^m x\sin nx\\ &= -(m+n)\cos^m x\sin nx + m\cos^{m-1}x\sin(n-1)x.\end{aligned}$$

对两边积分（这里需要 $m\geq 1$ 及 $n\geq 1$，使得 $m-1, n-1$ 均为非负），

$$\cos^m x\cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

即

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

这正是所需的结果（惯常的任意常数已并入不定积分（indefinite integral）之中）。

第 (i) 部分

设 $J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x$。把公式应用于 0 与 π 之间，并利用 $\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$，对 $m, n \geq 1$ 有：

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

若 m 与 n 的奇偶性相同，则 $m+n$ 为偶数，边界项消失，于是

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

此外，$m-1$ 与 $n-1$ 的奇偶性仍然相同，所以我们可以继续递推下去。

> **想一想** 这一连串的递推会在哪里停下来？为甚么在那里的值是零？

每一步都把两个指标各减 1，所以经过 $\min(m,n)$ 步之后，其中一个指标为 0，而另一个指标因奇偶性相同，必为偶数。因此只需证明对每个偶数 $k \geq 0$，都有 $J_{k,0} = 0$ 及 $J_{0,k} = 0$。

- $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \,\mathrm{d}x = 0$，因为被积函数（integrand）恒等于零。
- 对偶数 $k \geq 2$，$J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$。

因此，对 $\min(m,n)$ 使用归纳法（induction），可知只要 m, n 同为偶数或同为奇数，便有 $J_{m,n} = 0$。

或用其他方法：代换 $x = \pi - t$ 把 $\cos^m x$ 变为 $(-1)^m \cos^m t$，把 $\sin nx$ 变为 $-(-1)^n \sin nt$，所以 $J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$，由此可见当 $m+n$ 为偶数时必有 $J_{m,n} = 0$。被积函数关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 反对称（antisymmetric）。

第 (ii) 部分

为了引入余弦，写 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$：

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \,\mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

对 $m \geq 1$，边界项为 $-\left[\cos^m x \cos nx\right]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$，因为 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$。所以

$$(m+n)K_{m,n} = 1 + mK_{m-1,n-1} \qquad (m, n \geq 1).$$

由 $K_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$ 出发：

$$3K_{1,2} = 1 + K_{0,1} = 2, \qquad K_{1,2} = \tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3} = 1 + 2K_{1,2} = \tfrac{7}{3}, \qquad K_{2,3} = \tfrac{7}{15}.$$

另外 $K_{0,3} = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$，因为 $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$。因此

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = -\frac{2}{15}.$$

验算

第 (ii) 部分可以直接用积化和差公式（product-to-sum formulae）计算：$\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)$，它在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的积分为 $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{2}{15}$。答案为负数是合理的：在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上 $\sin 3x < 0$，而这正是 $\sin^2 x$ 最大的地方。用辛普森法则（Simpson's rule）算得 -0.133333，并且对许多 m, n 以数值方法验证了递推公式和第 (i) 部分。

常见错误

- 在 (ii) 中尝试使用代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$：它把 $\sin^2 x$ 变为 $\cos^2 t$，却把 $\sin 3x$ 变为 $-\cos 3t$，所以该积分并不属于 $I_{m,n}$ 的形式。
- 忘记递推公式只适用于 $m, n \geq 1$，所以 (i) 中的一连串递推需要另外处理有一个指标等于 0 的基本情况（base case）。

STEP 之外

像这样的递推公式，只是一个更大的故事的开端：三角函数乘积在一整个周期上的积分，正是傅里叶级数（Fourier series）背后的正交关系（orthogonality relations）；在那里，像 (i) 中那样的对称性论证，让人一眼就能判断哪些系数会消失。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）对傅里叶级数及其在求解微分方程（differential equation）上的应用，有一段浅白易读的介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。