详细解答

STEP III 1987，第 15 题

概率与统计 · 期望成本的最优化

STEP III 1987，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q15

关键思路

与其直接求 E_n 的最小值，不如看看多做一次测试会带来甚么改变。比较“做完 n 次便停”与“做完 $n+1$ 次便停”这两个策略时，只有至今已得到 n 次阳性结果的病人才有分别。对这些病人来说，多做一次测试要花 £10，而若病人患的是 Steppe 综合症而测试结果呈阴性，便可省下 £100 的治疗费。因此一切取决于 $E_{n+1} - E_n$ 的正负号，而这个正负号最多只会改变一次。

解答

设 F 为病人患上 Fenland 热病的事件（event），故 $\mathrm{P}(F) = p$，并设 $S = F'$ 为患上 Steppe 综合症。我们假设 Steppe 病人的各次测试结果互相独立（independent），每次呈阳性的概率为 q，其中 $0 < q < 1$。不论谁接受治疗，治疗费都是 £100。

第 (i) 部分

求 E_n。若病人患的是 F，每次测试都呈阳性。因此 n 次测试全部都要做，然后再接受治疗，费用为 $10n + 100$。

若病人患的是 S，第 k 次测试（其中 $1 \le k \le n$）只会在首 $k-1$ 次测试全部呈阳性时才进行，其概率为 q^{k-1}。因此测试次数的期望值（expected value）为

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

而病人只会在 n 次测试全部呈阳性时才接受治疗，其概率为 q^n。根据期望值的线性性质

（linearity of expectation），

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

由此亦得 $E_0 = 100$，这正合预期，因为此时所有人都接受治疗。

差值。 F 的部分增加了 10。在 S 的部分，$\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$，所以

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

解读这个结果：有 p 的概率，第 $n + 1$ 次测试白白用在热病病人身上。有 $(1 - p)q^n$ 的概率，这次测试用在 Steppe 病人身上，要花 £10，但它有 $1 - q$ 的概率可省下 £100。期望净节省为 $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$。

代入数值。 记 $D_n = E_{n+1} - E_n$。当 $p = 10^{-4}$ 及 $q = 10^{-2}$ 时，$9 - 10q = 8.9$ 而 $1 - p = 0.9999$，所以

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

> ? **想一想** 为甚么只需找出 D_n 在何处变号便已足够?

这里 $9 - 10q > 0$，而 q^n 随 n 增大而严格递减（strictly decreasing），所以 D_n 随 n 严格递增。因此当 $D_n < 0$ 时数列（sequence）E_n 下降，一旦 $D_n > 0$ 便上升，而最小值出现在第一个使 $D_n > 0$ 的 n。现在

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

所以 $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$ 且 $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$，医生应选 $n = 3$。（此时期望费用约为 £10.11，而立即治疗则要 £100。）

第 (ii) 部分

取 $q_0 = \frac{9}{10}$，并假设 $q > \frac{9}{10}$。那么 $9 - 10q < 0$，所以

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

对任意 $p \in [0, 1]$，这两项都是非负的。它们不可能同时为零：若 $p > 0$，第一项为正；若 $p = 0$，第二项为 $10q^n(10q - 9) > 0$。因此对任意 $n \geq 0$ 都有 $D_n > 0$，即

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots.$$

不论 p 取何值，医生都应选 $n = 0$，立即治疗。

这个 q_0 的值不能再调低。若 $q < \frac{9}{10}$，则当 p 足够小时，$D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$ 为负，所以至少测试一次会比 $n = 0$ 更好。用文字来说，当 $q > \frac{9}{10}$ 时，Steppe 病人的测试呈阴性的机会不足十分之一，所以即使未把热病病人计算在内，一次 £10 的测试平均省下的治疗费也不足 £10。

验算

- 直接计算 $n = 1$：$E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$。取 $p = 0$ 得 $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$，与公式给出的 $-10q^0(9-10q)$ 吻合。
- 当 $p = 10^{-4}$ 及 $q = 10^{-2}$ 时，公式给出 $E_0 = 100$、$E_1 \approx 11.010$、$E_2 \approx 10.1210$、$E_3 \approx 10.11309$ 及 $E_4 \approx 10.11400$。最小值出现在 $n = 3$，与上面所得一致。
- 以分数作精确枚举，已就数百组随机的 (p, q) 及 $n \le 8$ 验证了 E_n 的公式和差值恒等式；另外以 $p = 0.3$、$q = 0.5$、$n = 2$ 进行模拟，得出平均费用为 63.98，而精确值为 64。

常见错误

- 向 Steppe 病人收取全部 n 次测试的费用。整个过程在第一次出现阴性结果时便停止，所以第 k 次测试只有 q^{k-1} 的概率会进行。
- 找出第一个使 $D_n > 0$ 的 n，却没有说明 D_n 为何是单调的（monotonic）。少了这一步，数列 E_n 原则上有可能在之后再次下降。
- 在第 (ii) 部分忘记了 $p = 0$ 的情况。正因为这个情况，条件才是 $q > q_0$ 而不是 $q \ge q_0$：当 $q = \frac{9}{10}$ 且 $p = 0$ 时，每个 E_n 都等于 100。

STEP 之外

这是*最优停止*（optimal stopping）和决策论（decision theory）的一个小例子：一连串带有成本的行动、一个随机的状态，以及一条决定何时停止的法则。比较相邻的策略（即“边际分析”（marginal analysis）），并证明差值只变号一次，是处理这类问题的标准方法。这些想法会进一步通往贝叶斯决策论（Bayesian decision theory）和动态规划（dynamic programming）。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）涵盖了支撑这些理论的条件期望（conditional expectation）工具。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。