详细解答

STEP III 1987，第 14 题

力学 • 引力坍缩

> **STEP III 1987，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q14

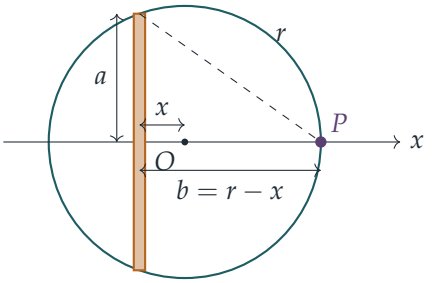
关键思路

实心球体可视为一叠薄圆盘，因此整个球体所施的力，就是把题目给出的圆盘公式沿着穿过质点（particle）的轴线积分。那个平方根看似麻烦，但只要留意到，当质点位于球面上时，根号内的式子可以因式分解，问题便迎刃而解。之后，关于云团的部分就是牛顿第二定律（Newton's second law）配合链式法则（chain rule）$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，而代换（substitution）$r = R\cos^2\alpha$ 的用意，正是要整理第二次积分时出现的平方根。

解答

球面上的力

把球心置于原点，质点 P 置于 x 轴上 $x = r$ 之处。把球体切成与轴线垂直的圆盘。位于 x 处的薄片（其中 $-r \le x \le r$）厚度为 δx，半径为 a，其中 $a^2 = r^2 - x^2$，而 P 位于该薄片的轴线上，与它相距 $b = r - x \ge 0$。



关键的化简在于平方根：

$$a^2 + b^2 = (r^2 - x^2) + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx = 2r(r - x),$$

所以

$$\frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{r - x}{\sqrt{2r(r - x)}} = \sqrt{\frac{r - x}{2r}}.$$

每个圆盘都沿轴线把 P 拉向球心，因此各个力的方向相同，直接相加即可。令 $\delta x \to 0$，合力为

$$\begin{aligned} F &= 2\pi mk\rho \int_{-r}^{r} \left(1 - \sqrt{\frac{r - x}{2r}}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_0^{2r} u^{1/2}\, \mathrm{d}u\right) \qquad (u = r - x) \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right) = 2\pi mk\rho \left(2r - \tfrac{4}{3}r\right) = \tfrac{4}{3}\pi mk\rho\, r. \end{aligned}$$

球体的质量为 $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$，所以 $\frac{4}{3}\pi\rho = M/r^3$，于是

$$F = \frac{kmM}{r^2},$$

方向指向球心，正如题目所求。

云团的运动方程

把云团中的质点看成一个质量为 M 的连续均匀球体，并考虑球面上一个质量为 m、与球心相距 r 的质点。根据上面的结果，它所受的唯一的力是指向球心的 kmM/r^2。取 r 为坐标（以向外为正），由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kmM}{r^2}.$$

现在 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，而根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

因此 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，约去 m 后得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{kM}{r^2}.$$

想一想 圆盘的结果是针对固定的球体而得出的。为甚么可以把它用于正在坍缩的云团？

任何一刻的力，只取决于该刻质量的分布，所以我们需要云团始终保持为均匀球体，而且球面以内的质量始终是 M。事实正是如此：一个从半径 λR 处由静止开始运动的质点（其中 $0<\lambda\le 1$），其内侧的质量为 $\lambda^3 M$，而只要 $r(t)$ 满足 $\ddot{r}=-kM/r^2$，$\lambda r(t)$ 便满足 $\ddot{s}=-k\lambda^3 M/s^2$。所以每个质点与球心的距离，始终是球面半径的同一个比例：云团按均匀的比例因子收缩，保持均匀，而且没有质点会越过球面上的质点。（质点外侧的质量只会对内部的质点有影响，而球面之外并无任何质点。）

由静止开始的坍缩

分离变量（separate the variables），并由 $r=R$（该处 $v=0$）起积分：

$$\tfrac{1}{2}v^2=\int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s=kM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)=\frac{kM(R-r)}{rR}.$$

加速度始终向内，而云团由静止开始，所以 r 一直递减，全程 $v\ge 0$。

现在代入 $r=R\cos^2\alpha$，当 r 由 R 向 0 递减时，α 由 $t=0$ 时的 0 向 $\frac{\pi}{2}$ 递增。这时 $R-r=R\sin^2\alpha$，所以

$$v^2=\frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha}=\frac{2kM}{R}\tan^2\alpha,\qquad v=\left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

这里取正根，因为 $v\ge 0$，而且当 $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时 $\tan\alpha\ge 0$。

> **想一想** 怎样由 v 作为 α 的函数，得出 t 作为 α 的函数?

利用 $v=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}=-2R\cos\alpha\sin\alpha$：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha}=\left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}2\cos^2\alpha=\left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

积分，并利用 $\alpha=0$ 时 $t=0$，得

$$t=\left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

这就是 $r=R\cos^2\alpha$ 的时刻，正如题目所求。

验算

- 时间很短时：当 α 很小，$t\approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$ 而 $R-r\approx R\alpha^2$，所以 $R-r\approx\frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$：即由静止开始、加速度为常数 kM/R^2 的运动，与起初阶段的预期完全吻合。
- 令 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$，得出整个坍缩所需的时间为 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$；即使 $v\to\infty$，这个时间仍是有限的。

- 数值上，把 200 000 个薄圆盘的力相加，所得结果与 kmM/r^2 的相对误差约为 2×10^{-9}。取 $k=1.7$、$M=2.3$、$R=1.9$，对 $\ddot{r}=-kM/r^2$ 逐步作数值计算，直至 $\alpha=0.8$ 所对应的时刻，得 $r=0.922260$，与 $R\cos^2 0.8=0.922260$ 吻合。

常见错误

- 由球心而非由质点量度 b：应为 $b=r-x$，而不是 x。
- 忘记 v 是向内的速率，这会令 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ 中的正负号相反。
- 为 v 取了负平方根，结果算出的时间是负数。

STEP 之外

第一部分是牛顿（Newton）球壳定理（shell theorem）的特殊情况：在球对称物体之外，引力的作用就如全部质量都集中在球心一样。大学课程会用引力的高斯定律（Gauss's law）$\nabla\cdot\mathbf{g}=-4\pi G\rho$ 简洁地证明它。你求得的坍缩时间，就是天体物理学家所说的自由落体时间（free-fall time），用来估算气体云坍缩形成恒星有多快；而以 α 作参数的表示法，也正是描述径向开普勒（Kepler）轨道的那一个。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种方式处理有心力（central force）和球壳定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。