详细解答

STEP III 1987，第 13 题

力学 · 涉及摩擦力的转动杆

STEP III 1987，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q13

关键思路

只要质点仍紧贴在杆上不滑动，杆与质点便作为一个刚体（rigid body）一同绕铰链转动，因此以整体的转动惯量（moment of inertia）应用能量守恒（conservation of energy），即可立刻求得 $\dot{\theta}^2$。要找出何时开始滑动，我们再单独考虑质点：它绕铰链作圆周运动，所以在径向和横向应用牛顿第二定律（Newton's second law），便能准确知道杆须提供多大的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）。当所需的摩擦力达到法向反作用力的 $\frac{1}{2}$ 时，滑动便开始。

解答

运动方程

把杆视为绕光滑铰链 O 转动的均匀刚性杆，并把质点视为与 O 相距 a 的质点。在质点滑动之前，它一直与 O 保持距离 a，并随杆一同转动。

系统对 O 的转动惯量为

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

这里用了长度为 $2l$ 的均匀杆对其一端的转动惯量 $\frac{4}{3}Ml^2$。

铰链是光滑的，而质点与杆之间的摩擦力和法向反作用力都是系统的内力，所以它们所作的净功为零。当杆转过角度 θ 时，杆的中心和质点（两者与 O 的距离均为 a）各下降了 $a\sin\theta$。由于系统从静止开始运动，能量守恒给出

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

即

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

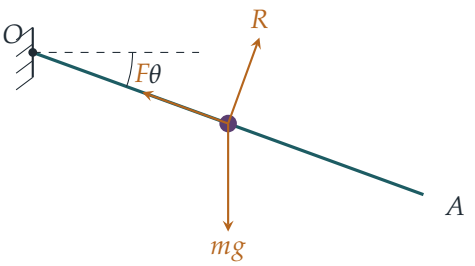
这正是所要证明的结果。对 t 求导得 $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$，所以（当 $\dot{\theta} \neq 0$ 时，而运动一旦开始这便成立）

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

（对 O 取力矩也可得到同样的结果：$5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$。）

质点何时滑动

现在单独考虑质点。作用在它身上的力有：重量 mg、垂直于杆的法向反作用力 R，以及沿杆方向的摩擦力 F。由于质点在以 O 为圆心、半径为 a 的圆上运动，它的加速度有一个沿杆指向 O 的分量 $a\dot{\theta}^2$，以及一个垂直于杆、沿 θ 增加方向的分量 $a\ddot{\theta}$。



我们取 F 沿杆指向 O，稍后会看到这正是质点所需的方向。沿杆方向分解，以指向 O 为正：重量有一个背离 O 的分量 $mg\sin\theta$，所以

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

垂直于杆方向分解，以 θ 增加的方向（即由杆向下）为正：重量的分量为 $mg\cos\theta$，所以

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

想一想 重力看来是把质点沿斜面向下拉，为甚么质点反而需要指向铰链的摩擦力？

起作用的不只是重力：质点要继续绕 O 作圆周运动，就需要一个指向 O 的净力 $ma\dot{\theta}^2$。重力沿杆的分量却指向相反方向，即背离 O，所以摩擦力既要提供向心力（centripetal force），又要抵销重力的分量。这就是为甚么 F 算出来是指向 O 为正，并且随 $\sin\theta$ 增长；而 R 很小，是因为杆正在质点下方“坠离”（在 $\theta = 0$ 时，质点有向下的加速度 $\frac{4}{5}g$，所以杆只承托它重量的 $\frac{1}{5}$）。

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，F 和 R 均为正，所以质点一直与杆保持接触。只要 $F \le \frac{1}{2}R$，质点便相对于杆保持静止，即

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \le \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \le \tfrac{1}{26}.$$

在 $\theta = 0$ 时，我们有 $F = 0 < \frac{1}{2}R$，而 $F/R = 13\tan\theta$ 随 θ 递增，所以质点最初开始滑动（向外，背离铰链）是在

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

之时，这正是所要证明的结果。

验算

- 在 $\theta = 0$ 时，力矩方程给出角加速度（angular acceleration）$\frac{4g}{5a}$；所以质点的加速度为 $\frac{4}{5}g$，小于 g，这与 $R = \frac{1}{5}mg > 0$ 一致。
- 以数值方法逐步计算刚体运动（取 $g = 9.81$，$a = 0.7$），所得结果与 $5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta$ 吻合，误差在 10^{-12} 以内；而直接由质点的计算加速度求得的摩擦力和反作用力，亦与 $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ 和 $\frac{1}{5}mg\cos\theta$ 相符。比值 F/R 最初达到 $\frac{1}{2}$ 时，$\theta \approx 0.03845$ 弧度，即 $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20^\circ$。

常见错误

- 忘记向心项，把质点当作在斜面上处于平衡来分解力；这样不但得出错误的角度，连摩擦力的方向也会弄错。
- 正确地使用了 $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$，却忘记把质点的 ma^2 加进转动惯量。
- 像在固定斜面上那样取 $R = mg\cos\theta$：杆正在加速，所以反作用力要小得多。

STEP 之外

这道题让我们初尝在转动参考系（rotating frame）中处理问题的滋味：从杆上观察，质点受到一个向外的“离心力”（centrifugal force）$ma\dot{\theta}^2$ 和一个“欧拉力”（Euler force）$-ma\ddot{\theta}$，而这些虚拟力（fictitious forces）正是我们求得的那些项。大学本科的力学课程会有系统地发展这套理论，并会讨论质点开始滑动后出现的科里奥利力（Coriolis force）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对刚体转动和非惯性参考系（non-inertial frames）有十分清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。