详细解答

STEP III 1987，第 12 题

力学 • 变质量转动

STEP III 1987，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s3-q12

关键思路

这是一道变质量（variable mass）问题，所以不能盲目套用 $F = ma$（或它在转动中的对应公式）。稳妥的做法是回到基本原理：比较时刻 t 与时刻 $t + \delta t$ 绕枢轴（pivot）的角动量（angular momentum），其间有少量已燃烧的燃料离开了系统。枢轴是光滑的，而重力沿铅垂方向，所以没有任何力对通过枢轴的铅垂轴产生力矩（moment），因此该角动量守恒。

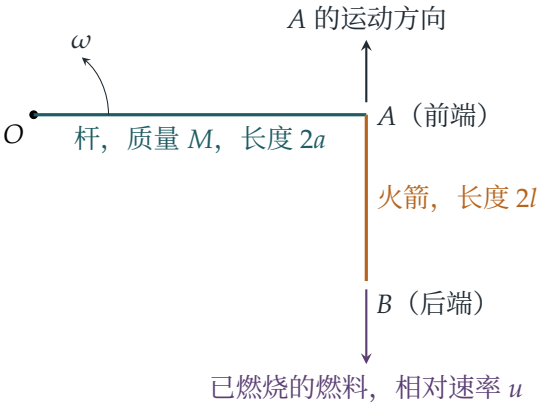
解答

建立模型

把杆和火箭都看成均匀刚体杆，在水平面上绕通过枢轴 O 的铅垂轴转动。设杆为 OA，其中 $OA = 2a$。取单位向量 $\mathbf{e}_r$ 沿 OA 方向，$\mathbf{e}_\theta$ 与它垂直并指向转动的方向，又设 $\mathbf{k}$ 为铅垂向上的单位向量，于是 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$。

火箭的前端在 A，并指向前方，即 A 的运动方向。因此火箭沿 $\mathbf{e}_\theta$ 方向放置，由 A 向后延伸至其后端 B，其中

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



转动惯量

杆绕其一端的转动惯量（moment of inertia）为 $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$。

火箭的中心位于 $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$，与 O 的距离为 $\sqrt{4a^2+l^2}$。它绕自身中心的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$，所以由平行轴定理（parallel axis theorem），它的贡献是 $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2+l^2)$。总和为

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I 如何变化

由于 $m = 2\alpha l$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$，我们有 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$。用积法则（product rule）对 I 求导，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m\cdot\tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l\cdot\tfrac{8}{3}l\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2+4l^2).\end{aligned}$$

留意 $4a^2 + 4l^2 = OB^2$：转动惯量下降的速率，恰好等于从后端 B 移走质量时所得的速率。这是合理的，因为一枚均匀的火箭若要保持均匀，而前端又固定在 A，就只能从后端缩短。

喷出燃料的角动量

在由 t 到 $t+\delta t$ 的短时间内，有质量为 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$ 的已燃烧燃料从 B 离开。燃烧之前，它随火箭一起运动，速度为 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k}\times\overrightarrow{OB}$。燃烧之后，它的速度是 $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$，因为它相对于火箭是向正后方运动的。这时它绕 O 的角动量为

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta) &= \delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k} - (2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\ &= \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

其中用到 $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$，以及当 $\mathbf{r}$ 垂直于 $\mathbf{k}$ 时 $\mathbf{r} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = \omega r^2 \mathbf{k}$。

> **想一想** 为甚么在排气的那一项中，$\overrightarrow{OB}$ 只有 $2a\,\mathbf{e}_r$ 这部分起作用?

排气的相对速度沿 $\mathbf{e}_\theta$ 方向，与火箭在同一直线上。所以 $\overrightarrow{OB}$ 沿火箭方向的分量不产生力矩。无论燃料在火箭上哪一点离开，由 O 到排气（以及推力）作用线的垂直距离都只是 $OA = 2a$。

角动量守恒

枢轴是光滑的，所以它的反作用力对通过 O 的铅垂轴没有力矩；重力沿铅垂方向，所以也没有力矩。因此整个系统（烟花连同在 δt 内燃烧的燃料）绕该轴的角动量在 t 与 $t+\delta t$ 两个时刻相同：

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t) + \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right] = I(t)\,\omega(t),$$

误差只有 $(\delta t)^2$ 阶的项。两边除以 δt，并令 $\delta t \to 0$，其中 $\delta\mu/\delta t = \alpha\beta$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) + \alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2) - 2\alpha\beta au = 0.$$

展开 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，并代入 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta(4a^2+4l^2)$，两个含 ω 的项恰好互相抵消，余下

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\alpha\beta au.$$

这正是“转动惯量 × 角加速度 = 推力的力矩”：推力（thrust）为 $\alpha\beta u$，沿火箭方向作用，与 O 的垂直距离为 $2a$。最后，

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2 + 2\alpha l\left(4a^2+\frac{4}{3}l^2\right)} = \frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2 + 8\alpha l(3a^2+l^2)}$$
$$= \frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2 + 2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},$$

正如所求。只要还有燃料剩下，即 $l > 0$，这个结果就成立。

验算

- 没有火箭时（$l \to 0$），结果变成 $\frac{4}{3}Ma^2\,\dot{\omega} = 2a \cdot \alpha\beta u$：推力乘以力臂，与预期相符。
- 量纲：$\alpha\beta u$ 是一个力（α 是每单位长度的质量，β 是一个速率），所以分子是力 × 长度，而分母是转动惯量。
- 数值上，取 $M = 1.3$、$a = 0.7$、$\alpha = 0.9$、$\beta = 0.4$、$u = 2.5$、$l(0) = 1.1$ 及 $\omega(0) = 0.3$，我们把运动分成多步来模拟：从后端逐一喷出 2×10^5 小块，每次都令角动量守恒。在 $t = 4.95$ 时，这样得出 $\omega \approx 2.39817$，而对公式积分则得出 2.39816。

常见错误

- 只对烟花本身写出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ 力矩。烟花并不是封闭系统，除非你同时计及燃料带走的角动量，否则这样会得出错误的答案。
- 把排气的绝对速度当作向后的 u，而不是相对于运动中的火箭的 u。
- 忘记 l 会改变，以致忽略了火箭的转动惯量是通过 m 和 l 两者而随时间变化的。

STEP 之外

这里的抵消是一个普遍的事实。若物体失去质量时，离开的质量带有当地的刚体速度再加上一个相对排气速度，则运动方程就是瞬时物体的普通运动方程，另加一个由相对速度产生的“推力”。这就是火箭方程（rocket equation）的转动版本。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）仔细讨论了变质量系统和角动量，程度正好与本题相若。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。