详细解答

STEP III 1987，第 11 题

力学 • 相对速度的最优化

STEP III 1987，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

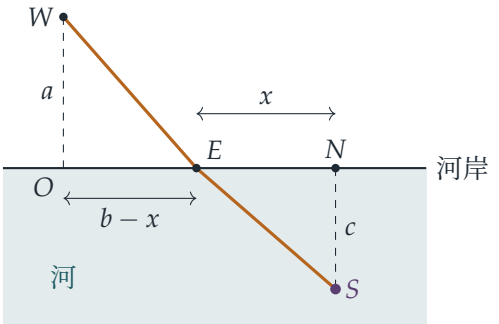
step.maths.org/questions/87-s3-q11

关键思路

把总时间写成单一变量 x 的函数，然后令其导数（derivative）等于零。在静水中，这其实就是光学中的折射（refraction）问题，答案是斯涅耳定律（Snell's law）。有水流时，唯一要多做的工夫是计算游泳时间：水流速度与她的游泳速度大小相同，所以两者之和是一个菱形（rhombus）的对角线，游泳时间因而成为 x 的一个出奇地简单的函数。

解答

把这名女子视为质点（particle），她在陆地上以恒定速率 u 运动，在水中则以相对于水的恒定速率 v 运动，两段路程都沿直线进行。取河岸为 X 轴，以下游为正方向，田野为 $Y > 0$，并设女子位于 $W = (0, a)$。于是树桩位于 $S = (b, -c)$，河岸上离树桩最近的点是 $N = (b, 0)$，而她在 $E = (b - x, 0)$ 下水，此点在 N 的上游，距离为 x。



她跑步的距离是 $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$，游泳的距离是 $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$。

静水

总时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

所以

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

函数 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$ 是递增的，所以 T' 的两项都随 x 增加而增加。因此 T' 严格递增，T 恰好有一个驻点（stationary point），而这个驻点就是它的最小值点。由于 $T'(0) < 0 < T'(b)$，这一点位于 $0 < x < b$ 之内。所求的方程是

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

或等价地 $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$。若以 WE 和 ES 与河岸法线（normal）所成的角 α 和 β 表示，这就是 $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$，亦即折射的斯涅耳定律。

流动的河水

现在河水以速率 v 向下游流动，而她相对于水的游泳速率也是 v。要沿直线 ES 前进，她必须选择一个游向（heading），与下游方向成向下的角 θ，使她相对于地面的速度沿 ES 的方向。

想一想 她沿 ES 实际移动得有多快？为甚么她必须在树桩的上游下水？

她相对于地面的速度是水流速度加上她的游泳速度：

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

这里用了 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。从几何上看，两个速度的长度相等，所以它们构成一个菱形，而两者之和平分它们之间的夹角。因此她相对于地面的路径与下游方向成向下的角 $\phi = \theta/2$。因为 $0 \le \theta \le \pi$，我们有 $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$，所以她只能向下游漂移：树桩必须在 E 的下游，即 $x > 0$。要使路径沿着 ES，我们需要

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{所以} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

而她沿 ES 的速率是 $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2 + c^2}}$。游泳时间等于距离除以速率：

$$\frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{2vx/\sqrt{x^2 + c^2}} = \frac{x^2 + c^2}{2vx}.$$

所以总时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

而

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

当 $x > 0$ 时，两项同样随 x 严格递增。此外，当 $x \to 0^+$ 时 $T'(x) \to -\infty$，而当 x 很大时 $T'(x) > 0$，所以恰好有一个驻点，并且它给出最短时间。令 $T'(x) = 0$，再乘以 $2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$（此式为正），得

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)[a^2+(b-x)^2]^{\frac{1}{2}},$$

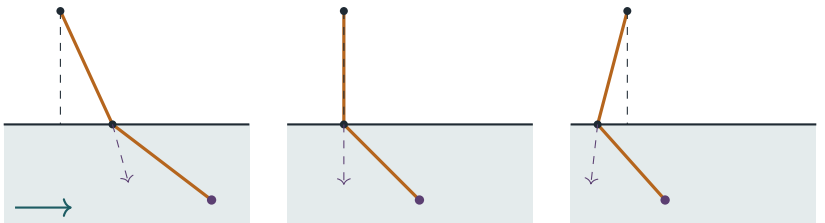
这正是所要求的结果。

三幅草图

不必解这个方程，也能从中看出 x 的位置。因子 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$ 是正数，所以 $b-x$ 和 $x-c$ 必须同号（或同时为零）。

- $b > c$：这时 $c < x < b$。假如 $x \le c$，便会有 $b-x > 0 \ge x-c$；假如 $x \ge b$，便会有 $b-x \le 0 < x-c$；两者都不可能。她在 $b-x > 0$ 处下水，位于 O 的下游，而该点是河岸上离她最近的点。由于 $x > c$，她的游泳路径与河岸所成的角 $\phi < 45°$，而她的游向 $\theta = 2\phi < 90°$ 偏向下游。
- $b = c$：这时按同样的论证可得 $x = c = b$。她直接跑到 O，然后正对着对岸横渡（$\theta = 90°$），水流则带着她沿一条与河岸成 $45°$ 的路径前进。
- $b < c$：这时 $b < x < c$，所以 $b-x < 0$。她要向上游跑去下水，沿一条比 $45°$ 更陡的路径游泳，而她的游向 $\theta > 90°$ 部分指向上游。

以下草图按比例绘画，取 $a = 3$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$，以及 $b = 4, 2, 1$。数值上，$x \approx 2.62$、$x = 2$ 和 $x \approx 1.79$。水流向右；E 处的虚线箭头表示她相对于水的游向。



$b > c$　　$b = c$　　$b < c$

验算

- 若 $b = c$，则 $x = c$ 使题目所给方程的两边都等于零，与上面所得一致。
- 正对着对岸横渡（$\theta = 90°$）：她每横渡 v，便向下游漂移 v，所以路径成 45°。公式给出速率 $2v\cos 45° = \sqrt{2}\,v$，路径长度为 $\sqrt{2}\,c$，所以时间是 c/v，这显然是应有的结果。
- 根据算术平均—几何平均不等式（AM–GM），游泳时间 $(x^2 + c^2)/(2vx)$ 在 $x = c$ 时最小。这是合理的：假如跑步不花任何时间，她会在 N 上游距离 c 处下水，然后正对着对岸横渡。
- 数值上，对 a, b, c, u, v 的 2000 组随机取值直接求 T 的最小值，所得的最小值点每次都满足两个方程，而且在第二种情况下都位于 b 与 c 之间。逐步模拟她在水流中游泳的过程，亦验证了游泳时间。例如，$a = 3$、$b = 4$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ 给出 $x \approx 2.621$。

常见错误

- 把水流速率直接加到她的速率上，仿佛她是对准树桩直游过去。她必须偏着游，使合速度（resultant velocity）指向树桩。
- 忘记了有水流时只有 $x > 0$ 才可能：由于两个速率相等，她根本无法逆流而上。
- 过早把关于 x 的方程两边平方。这样会失去正负号的信息，而正是这些信息把 x 定在 b 与 c 之间。

STEP 之外

第一个答案是斯涅耳定律，它源自费马原理（Fermat's principle）：光沿所需时间最短的路径行进。选择整条路径以使时间最短，正是变分法（calculus of variations）所研究的课题。与此密切相关的是策梅洛（Zermelo）导航问题：水流因地而异，如何驾驶一艘船穿越其中，才能最快到达目的地。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对相对速度和运动参考系有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。