详细解答

STEP III 1987，第 10 题

纯数学 · 伯努利多项式

> **STEP III 1987，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

关键思路

定义规则只通过导数（derivative）来确定 P_n，因此最自然的做法，是对差式 $P_n(x+1)-P_n(x)-nx^{n-1}$ 的导数运用归纳法（induction）：归纳假设令它变为零，于是只剩下一个常数，而积分条件就把这个常数确定下来。之后，所求的和是一个裂项和（telescoping sum）；至于立方和，我们只需要求出 P_4 除常数项以外的部分，反正常数项会互相抵消。

解答

差分恒等式

对 $n \geq 1$，设

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

我们用归纳法证明：对所有 x，$Q_n(x) = 0$。

基础情况 $n = 1$。由于 $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$，故对某个常数 c 有 $P_1(x) = x + c$。于是 $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$，所以 $Q_1 \equiv 0$。（事实上，由 $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$ 可得 $c = -\frac{1}{2}$，但我们用不着它。）

归纳步骤。假设 $n \geq 2$ 且 $Q_{n-1} \equiv 0$。求导，并利用 $P_n' = nP_{n-1}$，得

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

所以 Q_n 是常数，并且等于它在 $x = 0$ 的值。因为 $n \geq 2$，nx^{n-1} 这一项在 $x = 0$ 时为零，

所以

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

> **想一想** 我们怎样知道 $P_n(1) = P_n(0)$？积分条件说的是 P_n 的积分，而不是它在个别点的取值。

把积分条件用在低一级的多项式上。根据微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

这是因为 $n-1 \geq 1$，所以条件 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$ 适用。（这正是 $n=1$ 的情况必须另外处理的原因：$\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$。）因此 $Q_n \equiv 0$，归纳法至此完成：

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{对所有} n \geq 1.$$

幂和

在恒等式中代入 $x = m$，并对 $m = 0, 1, \ldots, k$ 求和。右边逐项相消：

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k} [P_n(m+1) - P_n(m)] \\ &= [P_n(1) - P_n(0)] + [P_n(2) - P_n(1)] + \cdots + [P_n(k+1) - P_n(k)] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

这正是所求。（当 $n=1$ 时，$m=0$ 的一项是 0^0，必须理解为 1；这样两边都等于 $k+1$。）

立方和

取 $n=4$，所以我们需要 P_4。由 $P_0 = 1$ 开始逐级向上，每次积分，并选取常数使得在 $[0,1]$ 上的积分为零：

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}, \\ P_2(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{6} && \text{因为 } \textstyle\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\ P_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x && \text{因为 } \textstyle\int_0^1 (x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0, \\ P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 + c \end{aligned}$$

其中 c 为某个常数。我们不需要求 c：它在 $P_4(k+1) - P_4(0)$ 中会抵消。记 $y = k+1$，则

$$P_4(y) - P_4(0) = y^4 - 2y^3 + y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2k^2.$$

所以在求和公式中取 $n=4$，得

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

当 $k = 1000$ 时，$\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500$，所以

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

这就是所要求的结果。

验算

- 较小的 k：$k = 2$ 给出 $0 + 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2$，而 $k = 3$ 给出 $36 = 6^2$。
- 同样的方法用于 $n = 2$，得 $2\sum m = P_2(k+1) - P_2(0) = (k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$，即大家熟悉的三角形数（triangular number）公式。留意立方和正好是它的平方，这是一个值得发现的巧妙之处。
- 用电脑以精确分数构造 $P_1, \ldots, P_{12}$，可在随机选取的有理点上验证差分恒等式，并对 $k \le 39$ 验证求和公式。直接把立方相加，得 $250\,500\,250\,000 = 500500^2$。（我们略过的那个常数，原来是 $c = -\frac{1}{30}$。）

常见错误

- 试图把 Q_n 在 $[0,1]$ 上积分，借此确定 Q_n 这个常数。这样会引入 $\int_1^2 P_n$，而我们对它一无所知。在 $x = 0$ 取值，再运用关于 P_{n-1} 的条件，要简洁得多。
- 忘记了 $P_n(1) = P_n(0)$ 这一步需要 $n \ge 2$，所以基础情况必须是 $n = 1$，并要亲手验证。
- 花时间去求 P_4 的常数项，而它其实会抵消。

STEP 之外

伯努利多项式（Bernoulli polynomials）有生成函数（generating function）$\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\ge 0} P_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$，而它们在 0 的值就是伯努利数（Bernoulli numbers）$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$。它们是欧拉—麦克劳林公式（Euler–Maclaurin formula）的核心；这条公式把一个和与一个积分及其误差项作比较。它们也出现在欧拉（Euler）对 $\sum 1/n^{2k}$ 的求值之中。想进一步了解这些想法，可参阅 Graham、Knuth 与 Patashnik 合著的 *Concrete Mathematics*（《具体数学》），书中对幂和与伯努利数有深入的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。