详细解答

STEP II 1987，第 8 题

纯数学 • 三维空间中的向量轨迹

STEP II 1987，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q8

关键思路

只要把每条方程改写成与位置向量（position vector）为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的点 A、B 之间的距离，就能认出它们各自代表甚么。至于等价（equivalence）的部分，一切都可以只用两个数表达：$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ 及 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$。这样，(i) 和 (ii) 就变成两条关于 P 和 Q 的简单线性方程，(iii) 和 (iv) 亦然。

解答

以下各处，A、B 和 R 分别是位置向量为 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{r}$ 的点，而 M 是 AB 的中点（midpoint），其位置向量为 $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。我们假设 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$（$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的情况留到最后处理），并记 $d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$。

第 (i) 部分

展开，

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2) - (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)\Big].\end{aligned}$$

所以 (i) 成立当且仅当 $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$，即 $RA = RB$。其轨迹（locus）是 AB **的垂直平分面（perpendicular bisector plane）**：经过 M 而法向量（normal）为 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的平面。（我们也可以直接看出它是一个平面，因为 (i) 的形式是 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 常数，其中 $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$；而 $\mathbf{r} = \mathbf{m}$ 满足此方程，因为 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$。）

第 (ii) 部分

方程 (ii) 表示 $\overrightarrow{RA}$ 与 $\overrightarrow{RB}$ 互相垂直，或者 R 就是 A 或 B。要辨认这个轨迹，可以配方（complete the square）：

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

所以 (ii) 等价于 $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$。其轨迹是**以 AB 为直径（diameter）的球面（sphere）**：球心 M，半径 $\frac{1}{2}AB$。这正是“半圆上的圆周角是直角”的三维版本。

第 (iii) 及 (iv) 部分

方程 (iii) 表示 $RA = d/\sqrt{2}$。其轨迹是**以 A 为球心、$AB/\sqrt{2}$ 为半径的球面**。同样地，(iv) 的轨迹是**以 B 为球心、$AB/\sqrt{2}$ 为半径的球面**。

等价性

设 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ 及 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$。第 (i) 部分已证明

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

至于 (ii)，写成 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$ 再取平方：

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

因此

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

方程 (iii) 和 (iv) 分别表示 $P = \frac{1}{2}d^2$ 及 $Q = \frac{1}{2}d^2$。现在

$$(P = Q \text{ 且 } P + Q = d^2) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

正方向成立，因为代入 $Q = P$ 得 $2P = d^2$。反方向方面，若 $P = Q = \frac{1}{2}d^2$，则显然 $P = Q$ 且 $P + Q = d^2$。以上每一步都是“当且仅当”，所以 (i) 与 (ii) 同时成立，等价于 (iii) 与 (iv) 同时成立，得证。

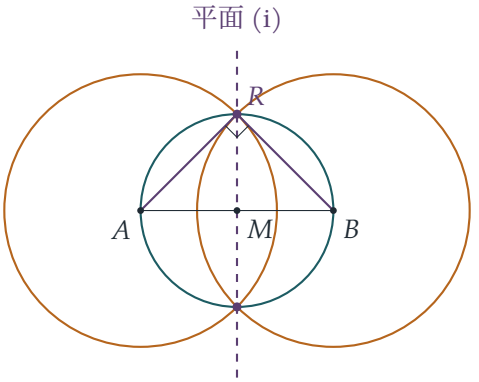
? **想一想** 一个平面与一个球面相交，怎会跟两个球面相交得出同一个集合?

两组方程描述的都是同一个圆。平面 (i) 经过球面 (ii) 的球心 M，所以它把该球面截出一个大圆（great circle）：圆心 M，半径 $\frac{1}{2}AB$，位于 AB 的垂直平分面上。球面 (iii) 和 (iv) 的半径同为 $AB/\sqrt{2}$，两者之和大于 AB，所以它们确实相交。由对称性，它们相交于垂直平分面上一个以 M 为圆心的圆。在三角形 AMR 中运用毕氏定理（Pythagoras' theorem），其半径为 $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$，所以是同一个圆。

几何意义

点 R 位于这个圆上，当且仅当三角形 ARB 是等腰直角三角形，且直角在 R。(i) 与 (ii) 这一组是通过三角形的性质来描述：$RA = RB$（等腰）及 $\angle ARB = 90°$（直角）。(iii) 与 (iv) 这一组则通过边长来描述：在斜边（hypotenuse）为 AB 的等腰直角三角形中，两条直角边的长度都是 $AB/\sqrt{2}$。上面的代数运算，其实就是毕氏定理及其逆定理（converse）的向量形式。恒等式 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$ 就是三角形 ARB 中的余弦定理（cosine rule）。

下图展示任何一个包含 A 和 B 的平面所截出的截面。平分面显示为虚线，球面 (ii) 显示为青色圆，球面 (iii) 和 (iv) 则显示为琥珀色圆。四者相交于两点，就是解集的圆穿过纸面之处。



退化情况

若 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$，则 (i) 变成 $0 = 0$，对所有 $\mathbf{r}$ 都成立，而 (ii)、(iii) 和 (iv) 都表示 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$。等价性仍然成立，但每个轨迹都退化（degenerate）为单一点 A（对 (i) 而言则是整个空间）。

验算

取 $\mathbf{a} = (1,0,0)$ 及 $\mathbf{b} = (-1,0,0)$。那么 (i) 是平面 $x = 0$，(ii) 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。方程 (iii) 和 (iv) 是 $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$，两式相减又得到 $x = 0$。四者相交于单位圆 $y^2 + z^2 = 1, x = 0$。例如 $R = (0,1,0)$ 给出 $RA = RB = \sqrt{2}$ 及 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = -1 + 1 = 0$。我们亦以有理数运算，对 5000 组随机选取的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{r}$ 精确验证了上述所有恒等式，并确认预测的圆上的随机点都满足全部四条方程。

常见错误

- 把 (ii) 说成“一个圆”。在三维空间中它是球面，而 (i) 的轨迹是平面，不是直线。
- 只证明了一个方向。题目要求证明等价，所以要确保每一步都可逆，或者把两个方向都证明。
- 只说两组方程“都得出一个圆”，却没有核实那是同一个圆：同一平面、同一圆心、同一半径。

STEP 之外

这些轨迹每一个都是 **r** 的某个二次函数的等值集（level set），而把两条球面方程相减得出一个平面的技巧，正是两个球面的*根面*（radical plane）这个概念。更广泛地说，用不同的方程组描述同一个几何对象，是代数几何（algebraic geometry）的起点。在这里，空间中的一个圆由两条方程截出，而有许多不同的方程组合都能做到。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是巩固向量代数的好去处，特别是点积（dot product）、长度与角度之间的关系。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。