详细解答

STEP II 1987，第 7 题

纯数学 · 梯形法则与阶乘

> **STEP II 1987，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

关键思路

以单位步长对 $\ln x$ 求梯形和（trapezium sum），结果几乎正好是 $\ln n!$，因为所加的高度正是 $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$。由于 $\ln x$ 是凹函数（concave），每一条弦都在曲线下方，所以梯形法则（trapezium rule）总是低估积分；单凭这一个事实，就能决定每条不等式的方向。至于最后一部分，技巧是把细网格上的误差重新缩放，使之变成另一个区间上的单位步长误差，从而可以直接与 $\mathrm{g}(kn)$ 背后的误差比较。

解答

说明法则的依据

把 $[x_0, x_N]$ 分成 N 条狭条 $[x_r, x_{r+1}]$，每条宽度为 h。在每条狭条上，以连接 $(x_r, \mathrm{f}(x_r))$ 与 $(x_{r+1}, \mathrm{f}(x_{r+1}))$ 的直线(弦(chord))代替曲线。弦下方的区域是一个梯形,面积为 $\frac{1}{2}h\{\mathrm{f}(x_r) + \mathrm{f}(x_{r+1})\}$。对 $r = 0, 1, \ldots, N-1$ 求和，每个内部纵坐标（ordinate）$\mathrm{f}(x_1), \ldots, \mathrm{f}(x_{N-1})$ 都在两个相邻梯形中出现，而两端的纵坐标各出现一次，于是得到题中的公式。当 h 很小时，弦与曲线相当接近，所以近似效果良好。

单位步长与 $n! \approx \mathrm{g}(n)$

取 $u = \ln x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ 作分部积分（integration by parts），

$$I_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \, \mathrm{d}x = n \ln n - n + 1.$$

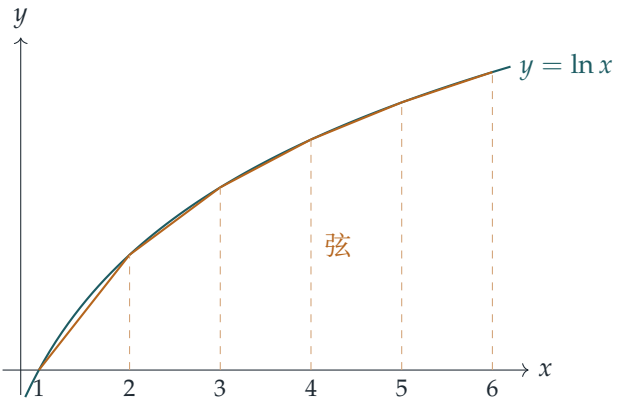
当 $h=1$ 时，纵坐标位于 $x=1,2,\ldots,n$，所以梯形和为

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n, \end{aligned}$$

这里用了 $\ln 1 = 0$。令 $T_n \approx I_n$，

$$\ln n! \approx (n+\tfrac{1}{2})\ln n + 1 - n, \qquad \text{所以} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

为何 $n! < \mathrm{g}(n)$



由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$，曲线 $y=\ln x$ 是严格凹的：在每条狭条 $[m, m+1]$ 上，除端点外，弦都严格位于曲线下方（见草图）。因此每个梯形的面积都严格小于该狭条上曲线下方区域的面积，把 $n-1 \geq 1$ 条狭条加起来，

$$T_n < I_n \quad \Longrightarrow \quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

由于 exp 是递增函数，所以 $n! < \mathrm{g}(n)$。

宽度为 $1/k$ 的狭条

现在 $h = 1/k$、$N = k(n-1)$，而对 $r = 0,1,\ldots,k(n-1)$，有 $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$。最后一个纵坐标是 $x_N = n$。把梯形和写成“h 乘以所有纵坐标之和，再减去两端纵坐标各一半”，并利用 $\ln x_0 = 0$，

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{ \sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n \right\}.$$

分子 $k+r$ 依次取 $k, k+1, \ldots, kn$，而分母中共有 $k(n-1)+1$ 个因子 k，所以

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k,$$

因为 $(k-1)!\,k = k!$。令 $kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$ 并整理，

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

即

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A,$$

正如所求。

哪一个更接近?

对整数 $a < b$，记误差（error）$\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$（单位步长梯形和，区间为$[a,b]$）为 $E(a,b)$。根据上面的凹性论证，$E(a,b) > 0$，而且相邻区间上的误差可以相加：$E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$。

推导 A 的过程中，除了以 I_n 代替 $T_n^{(k)}$ 之外，其余都是精确的，所以

$$\ln A - \ln(kn)! = k\big(I_n - T_n^{(k)}\big).$$

同理，把单位步长的推导中的 n 换成 kn，得 $\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$。

> ? **想一想** 宽度为 $1/k$ 的网格上的误差，怎样才能与宽度为 1 的网格上的误差作比较?

代入 $x = t/k$。纵坐标 $x_r = (k+r)/k$ 变成 $t = k, k+1, \ldots, kn$，而 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$，所以

$$k\big(I_n - T_n^{(k)}\big) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \big(\text{单位步长梯形和，函数为}\ln\tfrac{t}{k}\text{，区间为}[k,kn]\big).$$

由于 $\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$，而梯形法则对常数 $\ln k$ 是精确的，常数项互相抵消，所以上式正是 $E(k,kn)$。因此

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \big(\ln A - \ln(kn)!\big).$$

A 和 $\mathrm{g}(kn)$ 都大于 $(kn)!$，而当 $k \geq 2$ 时 $E(1,k) > 0$，所以

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

所以无论以差还是以比来衡量，新的近似值 A 都比 $\mathrm{g}(kn)$ 更接近 $(kn)!$。当 $k = 1$ 时两者相同，因为 $A = 1!\,n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$。换句话说，$A$ 对首 k 个因子使用了精确值 $k!$，只对其余部分作近似，因此避开了曲线起始处的误差 $E(1,k)$，而那正是 ln 弯曲得最厉害的地方。

验算

- 在最终公式中取 $k=1$，得回 $\mathrm{g}(n)$，理应如此。
- 取 $n=5$：$5!=120$，而 $\mathrm{g}(5)=5^{5.5}\mathrm{e}^{-4}\approx 128.0$，所以确实 $n!<\mathrm{g}(n)$。
- 取 $k=3$、$n=5$：$15!\approx 1.3077\times 10^{12}$，$A\approx 1.3369\times 10^{12}$，$\mathrm{g}(15)\approx 1.4102\times 10^{12}$，证实 $(kn)!<A<\mathrm{g}(kn)$。
- 比值 $\mathrm{g}(kn)/A=\exp E(1,k)$ 只取决于 k，与 n 无关；当 $k=3$ 时它等于 $\mathrm{g}(3)/3!\approx 1.0548$，与上面的数值吻合。

常见错误

- 数错宽度为 $1/k$ 的和中因子 k 的个数：纵坐标共有 $k(n-1)+1$ 个，而多出来的那个 $\ln k$ 正是把 $(k-1)!$ 变成 $k!$ 的关键。
- 用一幅弦位于曲线上方的草图去论证“$n!<\mathrm{g}(n)$”。对凹函数而言，弦位于曲线下方，所以梯形法则会低估积分。
- 忘记 $\ln A$ 的误差是细网格误差的 k 倍，而不是细网格误差本身。

STEP 之外

这里的 $\mathrm{g}(n)$ 是斯特灵公式（Stirling's formula）$n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}$ 的粗略形式。由于误差 $E(1,n)$ 随 n 递增且有界（每条狭条的误差最多是某常数乘以 $1/m^2$），它们收敛（converge），这就解释了为何 $n!/\mathrm{g}(n)$ 趋向常数 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e}\approx 0.922$。欧拉－麦克劳林公式（Euler–Maclaurin formula）把这一点精确化，并给出完整的渐近级数（asymptotic series）。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）讲述了黎曼积分（Riemann integral）以及支撑上述内容的数值积分法则的误差估计。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。