详细解答

STEP II 1987，第 6 题

纯数学 · 利用对称性求定积分

STEP II 1987，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q6

关键思路

区间 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 是对称的，所以反射 $\theta \mapsto -\theta$ 是自然的第一步：它把 $\sin\theta$ 变成 $-\sin\theta$，第二个形式便不费吹灰之力得到。把两个形式取平均，可消去奇部分（odd part），剩下分母只含 $\sin^2\theta$，再稍作代数处理，就能拆成一个常数加上一个标准的 $\tan\theta$ 积分（integral）。最后一部分的重点在于一个看似无害的步骤：$\sqrt{\cos^2 2\alpha}$ 是 $|\cos 2\alpha|$，而不是 $\cos 2\alpha$。

解答

全文记 $s = \sin 2\alpha$ 及 $c = \cos 2\alpha$，因此 $s^2 + c^2 = 1$。当 $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 时，有 $0 < s < 1$ 及 $0 < c < 1$。由于 $s < 1$，分母 $1 \mp s\sin\theta$ 在整个区间上都是正数，所以所有积分都是常义积分（proper integral）。

I 的第二个形式

代入 $\theta = -\phi$，于是 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，而上下限互换：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

这里用了 $\cos(-\phi) = \cos\phi$ 及 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$。把 ϕ 改名为 θ，即得所求形式。

含 $\cot^2 2\alpha$ 的表达式

把 I 的两个表达式相加，

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

现在利用 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ 及 $1 - s^2 = c^2$ 改写分母：

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

? **想一想** 怎样把 $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$ 拆成一个常数加上一个我们能积分的部分？

目标是把分子写成分母的倍数加上一个余项，而这个余项除以 $\cos^2\theta$ 之后不再依赖 θ。由于

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1 - c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

两边除以 $s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$（因为 $s \neq 0$，这是容许的），得

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

其中最后一步把分子分母同除以 $\cos^2\theta$。在长度为 π 的区间上积分，并利用 $c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$，得

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

此即所求。

求 I 的值

把余下的积分记为 J。代入 $t = \tan\theta$，于是 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；当 θ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 走到 $\frac{1}{2}\pi$ 时，t 走遍整条实数线。于是，当 $c \neq 0$ 时，

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan(|c|\,t)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

（$|c|$ 正是由代换 $u = |c|t$ 产生的：它使上下限仍按正确次序由 $-\infty$ 到 ∞。）

当 $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 时，$c > 0$，所以 $J = \pi/c$，而

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c} = \frac{\pi}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

这里约去了 $1 - c \neq 0$，并用了 $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$。这就是所求结果。

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 的情况

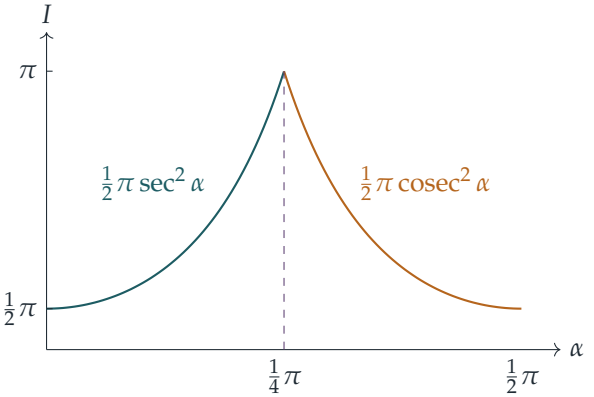
> **想一想** 当 α 越过 $\frac{1}{4}\pi$ 时，论证中有没有任何地方会改变?

几乎没有：我们仍然有 $0 < s < 1$，所以直至以 J 表示 I 的公式为止，每一步都照样成立。唯一的分别是现在 $c = \cos 2\alpha < 0$，所以 $|c| = -c$，而 $J = -\pi/c$。因此

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

这里用了 $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$。若盲目照搬第一个答案，便会得出错误的值。

I 对 α 的图像显示两条公式在 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 处相接，那里两者都等于 π:



验算

- 当 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 时，$s = 1$，被积函数（integrand）为 $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1+\sin\theta$，其积分为 π。两条公式在该处都给出 π，理应如此。
- 当 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 时:$s = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{1}{2}$,所以 $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$,而 $\frac{1}{2}\pi\sec^2\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$。
- 在 $\frac{1}{4}\pi$ 两侧随机取十个 α 值，用辛普森法则（Simpson's rule）计算原积分，与公式的结果相差少于 10^{-6}；例如 $\alpha \approx 0.6308$ 时，两种方法都得出 $I \approx 2.408759$。
- 当 $\alpha \to 0$ 时，被积函数趋向 $\cos^2\theta$，其积分为 $\frac{1}{2}\pi$，与 $\frac{1}{2}\pi\sec^2 0$ 吻合。

常见错误

- 写成 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$ 而漏了绝对值（modulus）。当 $c < 0$ 时，这是负数，而被积函数为正，这是不可能的。

- 遗漏了 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ 中的负号，或忘记了它会因上下限互换而抵消。
- 担心 $t = \tan\theta$ 在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 处无定义：关于 t 的积分是反常积分（improper integral），但它收敛（converges），而这已足够。

STEP 之外

答案中整齐的对称 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$ 并非巧合：I 只通过 $\sin 2\alpha$ 依赖 α，而它在这个互换下不变；但像 $\frac{1}{2}\pi\sec^2\alpha$ 这样的公式却会改变。默默地平方再开方的代数运算，正好会掩盖这类问题。$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数在一个完整周期上的积分（例如我们取平均后的被积函数，其周期为 π），在大学里通常用沿单位圆的围道积分（contour integration）来计算，而留数定理（residue theorem）使这类计算几乎变得机械化。如想看一个优美而富几何直观的入门介绍，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。