详细解答

STEP II 1987，第 5 题

纯数学 · 拉格朗日反演级数

STEP II 1987，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q5

关键思路

拉格朗日（Lagrange）恒等式（Lagrange's identity）就像一部机器：把函数 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ 放进去，取其 n 次方，求导 $n-1$ 次，再把结果加起来。所有功夫都在于把问题设置好，使 ϕ 尽量简单，最好是 y 的单一幂次或单一指数函数，因为这样 ϕ^n 的 $(n-1)$ 阶导数（derivative）就能一下子写出来。在每一部分中，我们都选取适当的 f，使所要解的方程写成 $\mathrm{f}(x) = y$ 的形式，其中 y 取一个方便的值。

解答

全文设 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$，于是恒等式可写成

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [\phi(y)^n].$$

注意 $n = 1$ 那一项涉及的是零阶导数，也就是 $\phi(y)$ 本身。

我们会反复用到一个事实：对整数 $m \geq n-1$，

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

因为每求导一次，就把当时的幂次乘到前面，并把幂次减一。

第 (i) 部分

取 $\mathrm{f}(x) = \alpha x$，则 $\phi(y) = (1-\alpha)y$，所以 $\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$。在上式中取 $m = n$，求导 $n-1$ 次得

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [(1-\alpha)^n y^n] = (1-\alpha)^n \, n! \, y.$$

$n!$ 与 $\frac{1}{n!}$ 互相抵消，所以恒等式的右方为

$$y + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n y = y \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n.$$

这是一个公比为 $1-\alpha$ 的等比级数（geometric series）。由于 $0 < \alpha < 2$，有 $-1 < 1-\alpha < 1$，因此级数收敛（converges），其和为

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

另一方面，由 $y = \alpha x$ 直接可得 $x = y/\alpha$，所以 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y/\alpha$。两者一致，于是恒等式在这情况下得到验证。条件 $0 < \alpha < 2$ 正正就是级数收敛的条件。

第 (ii) 部分

方程为 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$，其中

$$\mathrm{f}(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{所以} \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

于是 $\phi(y)^n = 4^{-n} y^{3n}$，在导数公式中取 $m = 3n$（它不小于 $n-1$），得

$$\frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [4^{-n} y^{3n}] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

因此拉格朗日恒等式给出

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

开头的 y 恰好就是通项在 $n = 0$ 时的值，因为 $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\, y^1 = y$。所以可以把它并入总和，由 $n = 0$ 开始：

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

现在代入 $y = \frac{1}{2}$。由于 $4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$，得

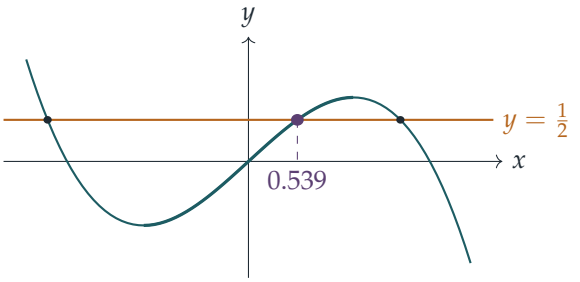
$$x = \mathrm{f}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

又因 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$，这个 x 是 $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$ 的一个根，得证。

? **想一想** 这个三次方程有三个实根。级数给出的是哪一个？

函数 f 在整条实数线上并非一一对应（one-to-one），所以“f^{-1}”指的是级数所描述的那一支。这个级数是 y 的幂级数（power series），以 $y + \cdots$ 开始，所以它给出 $\mathrm{f}^{-1}(0) = 0$，而且当 y 很小时 $\mathrm{f}^{-1}(y) \approx y$。它是 f 限制在通过原点的递增部分上的反函数，在那里

$\mathrm{f}'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 > 0$，即 $|x| < 2/\sqrt{3}$。首几项为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{3}{512} + \cdots \approx 0.537$，而总和准确至四位小数为 0.5392：这是最小的正根，已在下图标出。另外两个根约为 1.675 和 -2.214，位于曲线的递减部分。



曲线上较粗的一段是通过原点的递增分支；级数给出的就是这分支上的根，以梅红色标示。

第 (iii) 部分

这里的窍门是把整条方程化成 $\mathrm{f}(x) = y$ 的形式，并使 ϕ 简单。把 $x = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 改写为

$$x - \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

我们取

$$\mathrm{f}(x) = x - \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{\lambda y},$$

而所求的是 $x = \mathrm{f}^{-1}(0)$。此时 $\phi(y)^n = \mathrm{e}^{n\lambda y}$，每求导一次就乘以 $n\lambda$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y} = (n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

（当 $n = 1$ 时，这给出 $\mathrm{e}^{\lambda y}$，正确无误。）拉格朗日恒等式给出

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

代入 $y = 0$，

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\,\lambda^{n-1} = 1 + \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda^3 + \frac{125}{24}\lambda^4 + \cdots.$$

等价地，把指标平移，可得 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$。

这个级数在 λ 取甚么值时收敛？相邻两项之比为

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!} = \lambda\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \mathrm{e}\lambda,$$

所以由比值检验法（ratio test），级数在 $|\lambda| < 1/\mathrm{e}$ 时收敛。这是一个自然的界线：$y = x$ 与 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 相切，恰好发生在 $\lambda = 1/\mathrm{e}$ 时（切点在 $x = \mathrm{e}$），而当 $\lambda > 1/\mathrm{e}$ 时根本没有实根。当 $0 < \lambda < 1/\mathrm{e}$ 时有两个正根，级数给出较小的那一个，即当 $\lambda \to 0$ 时趋向 1 的那个根。

验算

- 在 (ii) 中，首四项为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{32}$、$\frac{3}{512}$ 和 $\frac{3}{2048}$。以数值方法加总 200 项得 0.539189，而对 $x^3 - 4x + 2 = 0$ 使用牛顿法（Newton's method）得根 0.5391888…，两者在机器精度内一致。
- 在 (iii) 中，代入 $\lambda = 0$：级数给出 $x = 1$，而确实 $x = \mathrm{e}^0 = 1$。取 $\lambda = 0.2$ 加总级数得 $x \approx 1.29586$，而 $\mathrm{e}^{0.2 \times 1.29586} = 1.29586$。取 $\lambda = -0.3$ 则得 0.78918，同样满足方程。当 $\lambda = 0.2$ 时，另一个根约为 12.71，与级数的值相距甚远。
- 在 (i) 中，试取 $\alpha = 1$：此时 $\phi = 0$，总和中每一项都是零，于是 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y$，理应如此。

常见错误

- 忘记 $n = 1$ 那一项不用求导（即零阶导数），因而漏掉或弄错这一项。
- 在 (ii) 中，没有察觉单独的 y 正是通项公式在 $n = 0$ 时的项，因而未能凑成由 $n = 0$ 开始的总和。
- 在 (iii) 中，尝试取 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 之类的函数。这样做并无不可，但 ϕ 便成了两项之差，导数会变得一团糟。选取 $\phi = \mathrm{e}^{\lambda y}$ 则令导数变得轻而易举。

STEP 之外

这就是*拉格朗日反演定理*（Lagrange inversion theorem），通常用复分析（complex analysis）（柯西（Cauchy）留数定理）或形式幂级数（formal power series）来证明。(iii) 中的系数 $(n+1)^{n-1}/n!$ 属于 Lambert W 函数，而 n^{n-1} 是 n 个顶点上的有根标号树（rooted labelled trees）的数目。同样地，(ii) 中的数 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$ 计算的是三叉树（ternary trees）的数目，与卡特兰数（Catalan numbers）是近亲。因此，拉格朗日反演是枚举组合学（enumerative combinatorics）的核心工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）提供复分析方面的背景，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）则有更多关于级数的 STEP 练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。