详细解答

STEP II 1987，第 4 题

纯数学 · 复数与几何

> **STEP II 1987，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q4

关键思路

乘以 $e^{i\theta}$ 就是一个旋转（rotation）。把三角形的一条边绕某个顶点旋转 $60°$，得到的正是等边三角形（equilateral triangle）。这样，几何条件就化为关于 α, β, γ 的线性方程（linear equation）。若容许两种定向（orientation），条件就变成两个线性表达式中有一个为零；两者之积正是题目中的对称（symmetric）二次式。由于它是对称的，所以可以用三次方程（cubic）的系数（coefficients）来表示。

解答

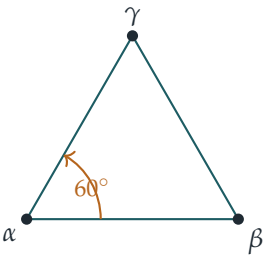
全文中设 $\omega = e^{2\pi i/3}$，于是 $\omega^3 = 1$、$\bar{\omega} = \omega^2$ 及 $1 + \omega + \omega^2 = 0$。

乘以 $e^{i\theta}$

若 $z = re^{i\phi}$，则 $ze^{i\theta} = re^{i(\phi+\theta)}$：模（modulus）不变，辐角（argument）增加 θ。因此，点 $ze^{i\theta}$ 就是点 z 绕原点逆时针（anticlockwise）旋转角 θ 后的像。

更一般地，$\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$ 表示由 α 到 γ 的向量，等于由 α 到 β 的向量逆时针旋转 θ 所得；换言之，γ 是 β 绕 α 旋转 θ 后的像。

逆时针方向的等边三角形



相异的点 α, β, γ 按逆时针次序构成等边三角形，当且仅当 γ 是 β 绕 α 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 所得，即

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

（必要性（necessity）：在这样的三角形中，$|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$，而且在 α 处的角为 $\frac{\pi}{3}$，由 $\alpha\beta$ 逆时针量度至 $\alpha\gamma$。充分性（sufficiency）：该方程给出 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$，两者夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以三角形是顶角为 60° 的等腰（isosceles）三角形，因而是等边三角形，而且定向是逆时针的。）

把条件写成对称的形式会更简洁。由于 $e^{i\pi/3} = -\omega^2$（因为 $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$，这里用了 $e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$），条件变为

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

其中用了 $1 + \omega^2 = -\omega$。两边乘以 ω^2（它不为零，所以这一步可逆），得到等价条件

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

简单验证一下：$1, \omega, \omega^2$ 是一个等边三角形按逆时针次序的顶点，而 $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$。

任一定向

任何三个构成等边三角形的相异点，若不是按 α, β, γ 的次序为逆时针，就是按 α, γ, β 的次序为逆时针（循环重排不会改变定向）。由上一部分，对相异的 α, β, γ，

$$\begin{aligned} \text{等边} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ 或 } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

? **想一想** 怎样看出这个乘积正是我们想要的表达式?

把它展开就可以了。平方项给出 $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$。交叉项为

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4)&=\alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\&=-\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

其中用了 $\omega^4=\omega$ 及 $\omega+\omega^2=-1$。因此

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

所以相异的点 α,β,γ（按某个次序）构成等边三角形，当且仅当

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

得证。

值得留意的是，若点不一定相异，情况会怎样：例如若 $\alpha=\beta$，表达式变为 $(\alpha-\gamma)^2$，只有当 $\gamma=\alpha$ 时才为零。所以表达式为零，恰好是在三点构成等边三角形或三点重合的时候。下文会用到这一点。

三次方程

设 $z^3+az^2+bz+c=0$ 的根为 α,β,γ。则

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

该表达式是对称的，所以可以用这些量来表示：

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

根据上面的说明，$a^2=3b$ 恰好在各根构成等边三角形或全部相等时成立。三个根都等于 t，即 $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$，所以 $a=-3t$、$b=3t^2$、$c=-t^3$；也就是 $b=\frac{a^2}{3}$ 及 $c=\frac{a^3}{27}$。因此，各根位于一个（真正的）等边三角形的顶点，当且仅当

$$\boxed{a^2=3b\quad\text{且}\quad 27c\neq a^3}$$

若愿意把三点重合视为退化的等边三角形，条件就只是 $a^2=3b$。

有一个漂亮的方法可以直接看出这一点。代入 $z=w-\frac{a}{3}$ 可消去 z^2 项；当 $a^2=3b$ 时，一次项亦会消失，方程变为 $w^3=\frac{a^3}{27}-c$。它的根是一个非零数的三个立方根，构成以 $w=0$ 为中心的等边三角形，即以 $z=-\frac{a}{3}$ 为中心，而这正是各根的形心（centroid）。

验算

- $z^3-1=0$（$a=b=0$, $c=-1$）的根为 $1,\omega,\omega^2$：构成等边三角形，而确实 $a^2=0=3b$ 且 $27c=-27\neq 0$。

- $z^3 - z = 0$ 的根为 $0, \pm 1$，三点共线（collinear）；此时 $a^2 - 3b = 3 \neq 0$。
- 以数值方法，对 1000 个随机三角形 α、β、$\gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$，我们验证了三角形为逆时针方向的等边三角形，$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$ 及该二次表达式（在每种次序下）都为零，而且对随机复数，乘积恒等式及 $a^2 - 3b$ 公式在 10^{-8} 的误差内成立。

常见错误

- 弄错正负号或定向：$e^{i\pi/3}$ 是 $-\omega^2$，而不是 ω；绕一个顶点乘以 ω 旋转（即旋转 120°）并不会得到等边三角形。
- 忘记三重根的情况：单凭 $a^2 = 3b$ 亦容许 $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$，此时三个“顶点”重合。

STEP 之外

条件 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ 是三元组 (α, β, γ) 的离散傅里叶变换（discrete Fourier transform）的一个分量；而消去 z^2 项的技巧，是以根式解（solving by radicals）三次方程的第一步，由此可通往伽罗瓦理论（Galois theory）。从几何角度看，这个结果表明：各根构成等边三角形，恰好是导数（derivative）$3z^2 + 2az + b$ 在形心处有二重根（double root）的时候；这是关于导数之根的马登定理（Marden's theorem）的一个特例。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）是进一步探索复数乘法几何意义的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。