详细解答

STEP II 1987，第 3 题

纯数学 · 共轭根式

STEP II 1987，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q3

关键思路

设 $\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$ 及 $\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$。两者互为共轭（conjugate）：它们的和 $2a$ 与积 b 都是整数，因此 $\alpha^n + \beta^n$ 必定是整数。若 b 所满足的条件迫使较小的共轭数 β 严格介乎 0 与 1 之间，那么 β^n 正是我们所需的小数部分（fractional part），其余结论便随之而来。

解答

在整个解答中，设

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

β 的位置。 首先，这个平方根是实数。由于 $b < 2a - 1$，

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0.$$

对这条严格不等式（inequality）两边取正平方根，得 $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$。另外 $b > 0$，所以 $a^2 - b < a^2$，从而 $\sqrt{a^2 - b} < a$。综合两者，

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

（这个条件是最佳的：若 $b = 2a - 1$，则 $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$，而 $\beta = 1$ 恰好成立。）

第 (i) 部分

由于 $0 < \beta < 1$，对每个正整数 n 都有 $0 < \beta^n < 1$。现在 M 是整数，且 $\beta^n = M + s$，其中 $0 \leq s < 1$，所以 M 是 β^n 的整数部分（integer part），即 0。因此

$$M = 0 \qquad \text{及} \qquad s = \beta^n.$$

第 (ii) 部分

设 $S_n = \alpha^n + \beta^n$。我们断言 S_n 是整数。设 $d = \sqrt{a^2 - b}$，用二项式定理（binomial theorem）展开两个幂，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(d^k + (-d)^k) = 2 \sum_{k\text{ 偶数}} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

因为 k 为奇数的项互相抵消。余下的每一项都是整数，所以 $S_n \in \mathbb{Z}$。（等价地，α, β 是 $t^2 - 2at + b = 0$ 的根，所以 $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$，其中 $S_0 = 2$ 及 $S_1 = 2a$。）

因此

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

> **想一想** 为甚么这就迫使 $N = S_n$ 及 $r = \beta^n$?

把 $\alpha^n = N - r$ 表示成 N 为整数且 $0 \le r < 1$ 的形式，这种表示是唯一的：N 必须是不小于 α^n 的最小整数。若 $N' - r' = N - r$，且 $r, r' \in [0, 1)$，则 $N - N' = r - r'$ 是一个严格介乎 -1 与 1 之间的整数，所以它等于 0。我们的表达式 $S_n - \beta^n$ 正是这种形式，所以

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

第 (iii) 部分

利用 $r = \beta^n$、$N = \alpha^n + \beta^n$ 及 $(\alpha\beta)^n = b^n$，

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

得证。换句话说，r 是 $t^2 - Nt + b^n = 0$ 较小的根，而这方程的两根是 α^n 和 β^n。

最后部分

取 $a = 8$ 及 $a^2 - b = 63$，所以 $b = 1$，且 $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$。条件 $b < 2a - 1 = 15$ 成立，所以以上所有结果都适用于 $\alpha = 8 + 3\sqrt{7}$:

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n = N - r, \qquad N \in \mathbb{Z},$$

而 α^n 比整数 N 小 r。在第 (iii) 部分中取 $b = 1$，得 $r(N - r) = 1$，即

$$r = \frac{1}{N - r} = \frac{1}{\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n} = \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n.$$

特别地，$r \neq 0$，所以这个幂本身永远不是整数，而且 $r \to 0$。现在 $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ 略小于 $\sqrt{64} = 8$，所以

$$8 + 3\sqrt{7} \approx 16 = 2^4, \qquad \text{因此} \qquad r = \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^{-n} \approx 16^{-n} = 2^{-4n}.$$

所以当 n 很大时，$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n$ 与某个整数相差大约 2^{-4n}，并且略小于该整数。

这个“大约”有多准确？由于 $8 + 3\sqrt{7} \approx 15.937$，我们有 $r = 2^{-cn}$，其中 $c = \log_2(8 + 3\sqrt{7}) \approx 3.994$。这个指数与 $4n$ 的差距在 0.2% 以内，估算正是在这个意义下成立。比值 $r/2^{-4n} = (16/(8 + 3\sqrt{7}))^n$ 缓慢上升，由 $n = 1$ 时约 1.004 升至 $n = 10$ 时的 1.04。

验算

- $n = 1$：$8 + 3\sqrt{7} \approx 15.93725$，即 $16 - 0.06275$，而 $8 - 3\sqrt{7} \approx 0.06275$，与预测相符。此外，$r^2 - 16r + 1 = 0$ 较小的根是 $8 - \sqrt{63}$。
- $n = 2$：$(8 + 3\sqrt{7})^2 = 127 + 48\sqrt{7} \approx 253.99606$，所以 $N = 254 = S_2 = 2 \cdot 8 \cdot 16 - 2$，而 $r \approx 0.003937$，对比 $2^{-8} \approx 0.003906$。
- 以电脑对数以千计满足 $b < 2a - 1$ 的随机数对 (a, b) 及 $n \leq 7$ 进行验算，确认了 $0 < \beta^n < 1$、$N - \alpha^n = \beta^n$ 及 $r^2 - Nr + b^n = 0$。对 $a = 8$、$b = 1$、$n \leq 10$ 进行的高精度验算确认了 $N - \alpha^n = (8 - 3\sqrt{7})^n$；当 $n = 10$ 时，此值为 9.46×10^{-13}，对比 $2^{-40} \approx 9.09 \times 10^{-13}$。

常见错误

- 只证明了 $\beta < 1$，却忘记 $\beta > 0$（这需要 $b > 0$）。两者都是 $M = 0$ 所必需的。
- 断言 $N = \alpha^n + \beta^n$，却没有说明为甚么 $N - r$ 中的整数部分与小数部分是唯一的。
- 以为 $r/2^{-4n} \to 1$。事实并非如此：近似只是在指数上成立，因为 $8 + 3\sqrt{7}$ 接近 16，但不等于 16。

STEP 之外

数 $\alpha^n + \beta^n$ 是迹（trace）的一个例子：α 是一个代数整数（algebraic integer），而它的共轭数位于单位区间之内，所以它的幂以指数速度趋近整数。这类数称为 Pisot 数（Pisot numbers）；黄金比例（golden ratio）是另一个例子，这就是为甚么 φ^n 接近卢卡斯数（Lucas number）L_n。这里的情况亦与佩尔方程（Pell's equation）密切相关：$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$，所以 $(8, 3)$ 是 $x^2 - 7y^2 = 1$ 的最小正整数解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对佩尔方程及连分数（continued fractions）有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。