详细解答

STEP II 1987，第 2 题

纯数学 · 三角恒等式

> **STEP II 1987，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q2

关键思路

这个式子只涉及 $\sin^2 A$、$\sin^2 B$ 和 $\sin^2 C$，而且它是 $\sin^2 C$ 的二次式（quadratic）。关于 $A \pm B \pm C$ 的条件表示 C 与 $A+B$ 或 $A-B$ 有关，因此自然会猜想这个二次式的两个根（roots）就是 $\sin^2(A+B)$ 和 $\sin^2(A-B)$。验证两根之和与两根之积便能证实这个猜想，结果随之而出。

解答

设 $x = \sin^2 A$、$y = \sin^2 B$、$z = \sin^2 C$，并把左边记作 E。于是

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

按 z 的幂次整理，

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\, z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

二次式的根

我们断言

$$E = (z - \sin^2(A+B))(z - \sin^2(A-B)).$$

由于两边都是 z 的首一（monic）二次式，只需验证 $\sin^2(A+B)$ 与 $\sin^2(A-B)$ 的和与积正确即可。

和。展开 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ 再平方，相加时交叉项互相抵消：

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B) + \sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A\cos^2 B + 2\cos^2 A \sin^2 B \\ &= 2x(1-y) + 2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

积。利用平方差（difference of two squares），

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = x(1-y) - (1-x)y = x - y,$$

所以 $\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$。

两者都与 E 的系数吻合，断言得证。

> ? **想一想** 为甚么只需知道 $\sin^2 C$ 等于 $\sin^2(A+B)$ 或 $\sin^2(A-B)$ 就足够?

因为这样 z 就是两个根之一，于是 E 的其中一个因式为零。余下要证明的，就是角的条件恰好给出这一点。

运用条件

假设对某个整数 k 及某些符号 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$，有 $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$。那么

$$C = \varepsilon_2(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)).$$

函数 $\sin^2$ 是偶函数（even function），且周期（period）为 π，因此符号 ε_2 和 $k\pi$ 都不会改变它的值：

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

所以 $z = \sin^2(A+B)$（当 $\varepsilon_1 = 1$）或 $z = \sin^2(A-B)$（当 $\varepsilon_1 = -1$）。无论哪种情况，E 都有一个因式为零，因此

$$E = 0,$$

即为所求。■

更简洁的形式（及逆命题）

每个因式都是两个正弦平方之差，而 $\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$（即上面的积公式取 $A = P$、$B = Q$）。所以

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

这里的四个角在不计正负号下，正好是 $A+B+C$、$A+B-C$、$A-B+C$ 和 $A-B-C$。这令结果一目了然：$E = 0$ 当且仅当四个角 $A \pm B \pm C$ 之一是 π 的倍数。这也给出了逆命题（converse）。

验算

- 取 $A=\frac{\pi}{6}$、$B=\frac{\pi}{3}$、$C=\frac{\pi}{2}$，于是 $A+B-C=0$。那么 $x=\frac{1}{4}$、$y=\frac{3}{4}$、$z=1$，且 $E=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=0$。
- 取 $A=0.3$、$B=0.7$、$C=1.1$（没有特殊关系），E 和四个正弦之积的值都是 0.05538，可见在条件不成立时，这个式子确实不为零。
- 对 10^5 组随机三元组的测试证实了这个因式分解（factorisation），并证实每当强制 $A\pm B\pm C$ 之一为 π 的倍数时，$E=0$ 的误差在 10^{-14} 以内。

常见错误

- 只处理 $A+B+C=\pi$（三角形）的情况。题目容许四种符号组合中的任何一种，以及 π 的任何倍数；$\sin^2$ 的偶性和以 π 为周期的性质可一并处理所有情况。
- 用公式解二次方程，结果被 $\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$ 缠住。验证所猜测的根的和与积，就能完全避开开方和正负号的烦恼。

STEP 之外

式子 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy$ 在数学中随处可见：把 x,y,z 换成 a^2,b^2,c^2，它就是边长为 a、b、c 的三角形面积平方的 -16 倍（海伦公式（Heron's formula）），它也是一个类似判别式（discriminant）的量，决定三条长度能否构成三角形。把对称多项式（symmetric polynomial）看成其中一个变量的二次式，并猜出它的根，是一种在代数及不变量理论（invariant theory）中反复出现的技巧。想做更多同类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。