详细解答

STEP II 1987，第 15 题

概率与统计 · 几何概率

STEP II 1987，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q15

关键思路

先不要想位置，改为考虑时间。每辆车都会在一段时间区间内占用交叉口，而碰撞发生的充要条件，正是这两段时间区间有重叠。把这个重叠条件写成两条不等式（inequality），(u_1, u_2) 平面上的碰撞区域就变成夹在两条过原点直线之间的楔形区域。由于 u_1, u_2 在 $(0, V)$ 上均匀分布（uniform），点 (u_1, u_2) 便在一个正方形上均匀分布，所以所求概率（probability）就是正方形中落在楔形区域内的面积比例，而题目的三种情况，对应的正是两条直线从正方形哪一边穿出。

解答

碰撞条件

我们把火车和货车看作以恒定速率 $u_1, u_2 > 0$ 沿两条相交于一点的直路行驶（交叉口的宽度忽略不计，或已计入车长之内）。碰撞发生当且仅当在同一时刻，两辆车各有某部分正处于交叉口。

火车车头在时刻 d_1/u_1 到达交叉口，车尾在时刻 $(d_1 + l_1)/u_1$ 驶离，因此火车占用交叉口的时间为

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

同样，货车占用交叉口的时间为 $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$。两个开区间（open interval）$(a_1, b_1)$ 与 (a_2, b_2) 有重叠，当且仅当每一个都在另一个结束之前开始：$a_1 < b_2$ 且 $a_2 < b_1$。所以碰撞发生当且仅当

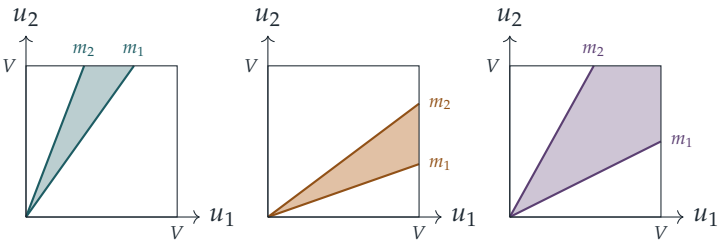
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{且} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

两边乘以正数 u_1u_2 再整理，即得

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1+l_1}\,u_1 \;<\; u_2 \;<\; \frac{d_2+l_2}{d_1}\,u_1.}$$

（若某条不等式取等号，两车只是车头碰车尾地刚好接触；这种情况的概率为零，所以算不算进去都没有影响。）

记 $m_1=\dfrac{d_2}{d_1+l_1}$ 及 $m_2=\dfrac{d_2+l_2}{d_1}$。由于 $d_2<d_2+l_2$ 且 $d_1+l_1>d_1$，有 $m_1<m_2$，因此碰撞区域就是第一象限中夹在直线 $y=m_1x$ 与 $y=m_2x$ 之间的楔形区域。下图以阴影显示它在正方形 $0<x,y<V$ 内的部分，这正是下一步所需要的。



(A) $d_1+l_1\le d_2$　(B) $d_2+l_2\le d_1$　(C) 其他情况

火车车尾比货车车头更接近交叉口时的概率

由于 u_1 与 u_2 互相独立（independent），且各自在 $(0,V)$ 上均匀分布，数对 (u_1,u_2) 在正方形 $(0,V)^2$ 上的联合密度（joint density）为常数 $1/V^2$。所以碰撞的概率为

$$\frac{\text{楔形区域在正方形内的面积}}{V^2}.$$

想一想 这两条直线分别从正方形的哪一边穿出?

若 $m\ge1$，直线 $y=mx$ 从正方形的上边穿出（于 $(V/m,\,V)$）；若 $m\le1$，则从右边穿出（于 $(V,\,mV)$）。在这情况下 $d_1+l_1<d_2$，所以 $m_1=d_2/(d_1+l_1)>1$，从而 $m_2>m_1>1$：两条直线都从上边穿出，如图 (A) 所示。

此时楔形区域在正方形内的部分，是顶点为 $(0,0)$、$(V/m_2,V)$ 和 $(V/m_1,V)$ 的三角形。它在上边的底长为 $V/m_1-V/m_2$，高为 V，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{碰撞}) &= \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)\\ &=\frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)}=\frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},\end{aligned}$$

因为 d_1d_2 项互相抵消。这就是所求的结果。

其余两种情况

货车车尾比火车车头更接近交叉口， $d_2 + l_2 < d_1$。此时 $m_2 = (d_2 + l_2)/d_1 < 1$，所以 $m_1 < m_2 < 1$，两条直线都从右边穿出，如图 (B) 所示。楔形区域是顶点为 $(0,0)$、(V, m_1V)、(V, m_2V) 的三角形：在边 $x = V$ 上的底长为 $(m_2 - m_1)V$，高为 V。所以

$$\mathrm{P}(\text{碰撞}) = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2 + l_2}{d_1} - \frac{d_2}{d_1 + l_1}\right) = \frac{l_1 l_2 + l_1 d_2 + l_2 d_1}{2d_1(l_1 + d_1)}.$$

这正是把第一个答案中火车与货车的角色对调（$l_1 \leftrightarrow l_2$，$d_1 \leftrightarrow d_2$）所得的结果；这是理所当然的，因为对调两辆车就相当于把图形沿 $y = x$ 作反射。

两辆车都不完全在对方前面， $d_2 \le d_1 + l_1$ **且** $d_1 \le d_2 + l_2$。此时 $m_1 \le 1 \le m_2$，所以直线 $y = m_1 x$ 从右边穿出，而 $y = m_2 x$ 从上边穿出，如图 (C) 所示。最简单的做法是从正方形中减去两个不会碰撞的三角形：在 $y = m_1 x$ 下方的那个面积为 $\frac{1}{2}V \cdot m_1 V$，而在 $y = m_2 x$ 左方（即它与 u_2 轴之间）的那个面积为 $\frac{1}{2}V \cdot V/m_2$。因此

$$\mathrm{P}(\text{碰撞}) = 1 - \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2m_2} = 1 - \frac{d_2}{2(d_1 + l_1)} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}.$$

在各情况的交界处，答案互相吻合：当 $d_2 = d_1 + l_1$（即 $m_1 = 1$）时，第一条和第三条公式都给出 $\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}$；在 $d_1 = d_2 + l_2$ 处亦然。留意所有概率都与 V 无关：把两个速率按同一比例放大或缩小，并不会改变两车是否相撞。

验算

- 取 $l_1 = 1$、$l_2 = 2$、$d_1 = 1$、$d_2 = 5$（情况 A），公式给出 $\frac{9}{70} \approx 0.1286$；以 4×10^5 组随机速率作模拟，得 0.1283。在情况 B 和 C 中的模拟（例如 $l_1 = l_2 = 1$、$d_1 = 1$、$d_2 = 1.5$，得 0.425）亦吻合至 0.002 以内。
- 在情况 A 中令 $l_1, l_2 \to 0$，概率为 0：两个点只有在 $u_2/u_1 = d_2/d_1$ 恰好成立时才会在交叉口相遇。
- 在情况 C 中取 $d_1 = d_2$ 而两车都很长，则 $m_1 \to 0$ 且 $m_2 \to \infty$，所以概率趋于 1，这是合理的。

常见错误

- 只写一条不等式，例如“火车在货车驶离交叉口之前到达”；两个区间有重叠需要两个条件同时成立。
- 在情况 C 中套用三角形面积公式，但那里的区域其实是四边形；应先确定每条直线从正方形哪一边穿出。

STEP 之外

这里的方法是把关于独立均匀随机变量的概率转化为面积，称为几何概率（geometric probability）；它是把 $\mathrm{P}((X,Y)\in A)$ 计算为联合密度的二重积分（double integral）的最简单例子。同一想法也是一些经典问题的基础，例如布丰（Buffon）投针问题，以及两人在随机时刻到达的“相遇问题”。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）正是以这种方式发展联合密度及其应用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。